T. 12. 73 - Q. 17 a. 22 1

LECTIONES Geometricæ:

In quibus (præsertim)

GENERALIA *Curvarum Linearum* SYMPTOMATA

DECLARANTUR.

Auctore ISAACO BARROW, Collegii S. S. *Trinitatis* in Acad. *Cantab.* Socio, & *Societatis Regiæ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵτε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴσγε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub. VII.

LONDINI,

Typis *Gulielmi Godbid*, & prostant venales apud *Gualterum Kettilby*, ad Insigne *Capitis Episcopi* in Cœmeterio D. *Pauli*. M.DC.LXXII.

TRINITY COLLEGE
LIBRARY.
CAMBRIDGE

Benevolo Lectori.

Lectionibus his (quas jam quodammodò posthumas accipis) septem, unâ sepositâ, postremas Opticis *illis, quæ nuper editæ prostant, Comitis & quasi Mantissas destinâram; aliàs, opinor, de proferendis in apricum ejusmodi quisquiliis nihil cogitaturus. Sed cum nihilominùs è re sua fore censeret* Librarius *ab istis divulsas has seorsum comparere; quin & ad comparandum huic Opellæ speciem aliquam (ut ea nempe* rejectanei Schediasmatis *molem transcenderet) aliud quidpiam suppeditari cuperet; ejus (haud gravatìm non dixero) votis obsecundans, adjeci Lectiones priores quinque; subsequentibus illis materiâ agnatas, & quasi cohærentes; quas scilicet ante aliquot annos*

ut

ut nullo animo evulgandi, ità procul ab ea cura conceperam, quæ talem animum deceret; Enimverò craſsiùs & ἐμπολαίτερον ſcriptæ ſunt, neque firmè quicquam continent, extra Tyronum, *quibus accommodatæ ſunt, uſum, captúmve jacens. quapropter harum rerum peritos obteſtor, ut ab iis prorſus abſtineant oculos, vel ut veniam ſaltem paullò liberaliùs indulgeant. alteras quas dixi ſeptem conſpectui tuo lubentiùs expono, nonnulla ſperans in illis haberi, quæ nec eruditiores piguerit inſpicere. Ultimam* amicus *(vir ſanè cum primis probus, aſt in hujuſmodi negotiis* Flagitator improbus*) extorſit, aut certè, pro jure quod meritò obtinet ſuo, exegit. Cæterùm quid tractent, & quorſum tendant, facilè ſingularum initia delibans edoceberis; ut non ſit cur te longiùs morer aut detineam.* Vale.

Lectio I.

NOvum jam ingredior dicendi campum, amæniorem ſanè neſcio vel feraciorem, uberrimâ varietate confertum, eóque delectabilem; & quia primas fermè *Mathematicarum hypotheſium origines* recludit (è quibus nempe *magnitudinum cùm definitiones efformantur; tum proprietates emergunt*) neceſſariò perquam utilem. De magnitudinum intelligo generatione; ſeu de modis, quibus ortæ productæve concipiantur variæ magnitudinum ſpecies. Nec ulla certè magnitudo datur, quæ non innumeris modis & intelligi producta poſſit, & reverà produci. Poſſunt autem, qui ſaltem hactenus uſurpati ſunt, ad præcipua quædam genera referri, quorum ſe mihi jam cogitanti ſuggerentia ſunt hæc; *per motus locales*; *per interſectiones magnitudinum*; *per quantitate poſitioneque determinatas ab aſſignatis locis diſtantias*; *per ductus magnitudinum in magnitudines*; *& per applicationes magnitudinum ad magnitudines*; *per aggregationem magnitudinum ordine certo diſpoſitarum*; *per appoſitionem magnitudinum ad alias, vel ſubductionem ab aliis*; *per organicam demum* (ab horum quocunque deductam, aut ordinatam) *effectionem*. Horum, & ſi qui ſunt aliorum modus primarius, & quem alii cuncti quodammodo ſupponant oportet, utpote ſine quo nil procreari poteſt, eſt iſte, *qui per motum localem*. De quo proinde primo diſpiciendum. De motu celebratur illud *Ariſtotelis* effatum, ἀναγκαῖον ἀγνοουμένης ἀυτῆς (κινήσεως) ἀγνοεῖδς καὶ τὼ φύσιν: ignorato motu neceſſariò naturam ignorari; in Phyſicis ideò paginam utramque facit; nec immeritò, cùm in natura (ſaltem quantùm humanus intellectus aſſequi valet, aut experientia commonſtrare) quicquid fiat, à motu fiat, aut certè non abſque motu. De natura motûs igitur, & rectâ definitione; de cauſis, de differentiis complura ſubtiliter argutantur Phyſici, quorum ferè *Mathematicis nihil cordi*

3 Phyſ. 1.

vel curæ. Sufficere poteſt his quæ communis ſenſus agnoſcit, & obvia comprobant experimenta pro conceſſis arripere; hoc imprimis generale, Quamvis magnitudinem (magnitudinibus etiam punctum accenſebo ceu minimum magnum, ut & infinitum ceu maximum magnum, quibus mediæ interjacent magnitudines omnes finitæ) mobilem eſſe, hoc eſt eo quo conſpicimus indies fieri modo locum ſuum & ſitum poſſe demutare, juxta differentias præſtitutas, motu nempe vel directo, vel circulari; æquabiliter veloce, vel utcunque magis accelerato, vel magis retardato. Hujuſmodi dico motuum quemvis pro lubitu ſuo tanquam evidenter poſſibilem aſſumunt, ut quid exinde conſequatur inveſtigent & oſtendant. De iis igitur differentiis motuum quotæ ſint & quales diſſeremus. In motu potiſſimùm à *Mathematicis* conſiderantur *ipſe modus lationis*, *& quantitas vis motivæ*. ipſe modus primò lationis, juxta quem motus, alii progreſſivi ſunt, alii circumlatitii, alii compoſiti ex his; tum vis motivæ quantitas, propter quam alter alterius reſpectu velocior, tardior, æquè velox; aut in ſe æquabilis, acceleratus, retardatus affirmatur. Ex his manant fontibus differentiæ motuum; quorum de poſteriore nos primùm agemus, quia nonnulla continet ἐξωτερικὰ quæ velim quam primum ablegata, quo reliqua poſtmodùm expeditius fluant & limpidiùs. & quia vis motivæ quantitas ſine tempore dignoſci nequit, de temporis natura perſtringendum eſt aliquid. Tempus autem dic ſodes, quid eſt? illud *Auguſtini* tritiſſimum noſtis; ſi nemo quærat ſcio, ſi quis interroget neſcio. Verùm quia *Mathematici* crebrò tempus adhibent, quid eo deſignetur vocabulo diſtinctè concipiant oportet; agyrtæ ſecùs futuri. quare jure reſponſum exigatis; ac ſtatim pareo, ſed breviter ac ſimpliciter, & quantùm potero λεπτολογήματα defugiens. Abſtractè loquendo, tempus eſt perſeverantia rei cujuſque in ſuo eſſe. Alias verò res aliis diutiùs in eſſe ſuo permanere; fuiſſe cùm hæ non erant, eſſe cum hæ non ſunt; priùs incepiſſe, ſeriùs deſinere; neque non aliquas cum aliis unà oriri ac occidere, ſimultaneóq; quaſi durationis progreſſu, à carceribus ad metas, univerſum ætatis curriculum emetiri, nemini non perſpectum eſt. Ergò tempus abſolutè quantum eſt; ut quantitatis admittens (modo ſuo) præcipuas affectiones æqualitatem, inæqualitatem, proportionem; nec enim diffiteatur quiſquam, opinor, ἰσόχρονα fore, quæ ſimul exoriuntur & ſimul intereunt; inæqualiter durâſſe, quorum unum fuit antequam alterum cæperit eſſe, nec non eſſe perſeverat, poſtquam alterum deſiêrit exiſtere. Longius autem, & brevius tempus nemo non dicere ſolet, nemo non concipere videtur. Quantitatis igitur particeps eſſe tempus communis ſenſus agnoſcit,

pro

pro modo permanentiæ rerum in ſuo eſſe. At enim dices: ante res omnes conditas annon tempus fuit? extra mundum, ubi nihil manet, annon tempus labitur? reſpondeo, ſicut ante conditum mundum fuit ſpatium, & extra mundum nunc eſt & quidem infinitum cui Deus coëxiſtit) quatenus potuerunt olim, & poſſunt jam exiſtere talia tantáque corpora, quæ tum non fuerunt, aut jam non ſunt; ità priùs mundo, & ſimul cum mundo (licèt extra mundum) tempus fuit, & eſt, quatenus ante mundum exortum potuerunt aliquæ res in eſſe tamdiu permanere, poſſint jam extra mundum talis permanentiæ capaces res exiſtere; potuit *Sol* multo priùs in lucem emerſiſſe; poſſit jam ille, vel alius talis ſpatiis imaginariis affulgere. Tempus igitur non actualem exiſtentiam, at capacitatem ſeu poſſibilitatem denotat permanentis exiſtentiæ; ſicut ſpatium capacitatem deſignat magnitudinis intercedentis. Sed mirum, ingeres, ſecluſo motu tempus explicari; annon tempus motum implicat? Minimé dico quoad abſolutam, & intrinſecam naturam ſuam; haud magìs quàm quietem; à neutro temporis quantitas in ſe dependet; ſeu currant res, ſeu ſtent; ſeu dormiamus nos, ſive vigilemus æquo tenore tempus labitur. Finge ſtellas omnes ab incunabulis ſuis fixas perſtitiſſe; nihil indè quicquam tempori deceſſiſſet; tamdiu quies iſta perdurâſſet, quamdiu motus hic effluxit. Prius, poſterius, ſimul (quoad ortus rerum & interitus) etiam in illo tranquillo ſtatu fuiſſet in ſe, potuiſſet à mente magìs perfecta apprehendi. Sed prout ipſæ magnitudines ſunt abſolutè quantæ, independenter ab omni menſuræ reſpectu, etſi nos ipſarum quantitates niſi menſuras applicando percipere nequeamus; ità per ſe tempus quantum eſt, etſi quo temporis quantitas a nobis dignoſcatur, advocandum ſit motûs ſubſidium, ceu menſuræ quâ temporum quantitates æſtimemus, & inter ſe conferamus; adeóque tempus ut menſurabile motum connotat, nec enim, ſi res omnes immotæ perſtarent, ullo pacto quantum effluxiſſet temporis poſſemus internoſcere; rerum ætas indiſcreta nobis, & imperceptibilis cederet. Temporis fluxum non perciperemus dico? Imo nec aliud quippiam, at ſtupore continuo defixi ceu ſtipites conſiſteremus aut ſaxa. Nihil enim animadvertimus niſi quatenus aliqua mutatio ſenſum afficiens nos interpellat, aut interna mentis operatio noſtram conſcientiam laceſſit, ac excitat. Ex motûs forinſecùs impellentis, aut intra nos tumultuantis extenſione, vel intenſione diverſos rerum gradus & quantitates æſtimamus. Ità motûs quantitas, in quantum à nobis obſervari poteſt, à motûs extenſione dependet;

Nec per se quenquam tempus sentire fatendum est
Semotum ab rerum motu placidâque quiete;

Haud malè dixit *Lucretius*. & *Philosophus ipse*; Ὅλως δ' αὐτὴ μὲν ἡμῖν
Phys. IV. 16. μεταλλάττειν τὴν διάνοιαν, ἢ λάθωμεν μεταλλάττοντες, οὐ δοκεῖ ἡμῖν γεγονέναι
χρόνος. Rectè quidem hoc, non videtur nobis, non apparet à somno excitatis quantum temporis interceſſit; at non hinc rectè colligitur, φανερὸν ὅτι οὐκ ὄντος ἄνευ κινήσεως καὶ μεταβολῆς ὁ χρόνος. Non perſentiſcimus, ergò non eſt, illatio fallax, & fallax ſomnus, qui fecit ut nos duo ſemota temporis inſtantia connecteremus. interim veriſſimum illud; ὅτι ἡ κίνησις, τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος· αἰεὶ δοκεῖ γεγονέναι, quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitiſſe; neque quum tantum tempus dicimus, aliud conſuevimus intelligere, quam tantum motum intercedere potuiſſe, cujus ſcilicet extenſioni continuò ſucceſſivæ rerum permanentiam imaginamur coëxtendi. Cæterùm quia tempus alveo ſemper æquali, non per vices nunc ſegniùs, tunc rapidiùs præterlabi concipimus (admiſsâ ſiquidem illâ diſparitate nullam omninò computationem, aut dimenſionem admitteret) non ideò motus omnis æquè determinandæ dignoſcendæque temporis quantitati cenſeatur accommodatus, at is præſertim qui ſummè ſimplex &. uniformis æquabili ſemper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, pérque medium uniforme delato. Quare tempori determinando tale quiddam mobile deligendum eſt, quod ſaltem quoad motûs ſui periodos æqualem conſtanter impetum ſervat; & per æquale ſpatium decurrit. Et ad communem quidem uſum accipiendus eſt ejuſmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obvius, & ſenſus omnium incurrens, qualis eſt motus ſyderum, imprimis *Solis & Lunæ*, mirificè ſibi per omnia conſtans, & orbi terrarum conſpicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ ſuffragio deputatus, at divino Creatoris conſilio aptus natus eſt huic uſui; à quo nempe pronunciatum legimus: *Fiant luminaria in firmamento Cæli, & dividant diem ac noctem, & ſint in ſigna, & tempora, & dies, &*
Gen. I. 14. *annos.* At quomodò, dices, cognoſcetur *æquabili ſolem motu ferri, & unum puta diem, aut annum alteri penitus exæquari, vel æqui temporaneum eſſe?* Reſpondeo non aliter hoc (excipiendo quòd à divino teſtimonio colligatur) nobis innoteſcere, quàm cum aliis æqualibus motibus ipſum ſolis motum contendendo. Si nempe deprehendatur ſolis motus in horologio ſolari (quod ſpatiorum à ſole in circulis æquatori parallelis percurſorum penè certo ac exquiſitè quantitates indicat)

indicat) cùm organi cujuſvis horodeictici, ſatis accuratè conſtructi, motibus conſentire. Talis enim machina è fabrica ſua comparata eſt, ſecundum motûs ſui repetitiones ſuccedaneas, æqualiter moveri; *Clepſydram* puta dimetiendæ diei, vel horæ deſtinatam; & quoniam in hac aqua, vel arena quoad quantitatem ſuam, & figuram, vimque deſcendendi prorſus eadem manet; nec non vaſculum continens, & meatus ipſam tranſmittens haud omnino variantur, tantillo ſaltem tempore, pérque temperiem aëris conſimilem, nec ideò cauſa ſubeſt ulla, cur non æquales in ſingulis effluxibus motus obire concedatur; ergò ſi compertum ſit, Solares motus, ſeu quoad integras periodos, ſeu quoad partes ipſarum proportionales, organi talis repeti is motibus exquiſitè congruere, meritò pronunciandum eſt, eos prorſus æquabiles, & uniformes fore. Ex quo diſcurſu liquere videtur, id quod fortè non nemini mirum videatur, cæleſtia corpora non eſſe, ex parte rei propriéque loquendo, primarias & originales temporis menſuras; aſt illos potius motus, qui prope nos ſenſibus obverſantur, & experimentis subjacent noſtris, cùm horum ope cæleſtium motuum regularitatem dijudicemus. Nè quidem ipſe Sol temporis idoneus judex, aut teſtis αὐτόπτης eſt, niſi quatenus horariæ machinæ ſuffragio veracitatem ſuam adteſtatur. Nec ſanè, quod obiter interpono, poteſt ullo pacto ſciri num periodi ſyderum ante multa ſecula tranſcurſæ noſtri ſeculi revolutionibus omnino pares fuerint; nemo ſcilicet aſſerat certò *Methuſelam* illum qui tantùm non mille vitæ tranſegit annos, eo fuiſſe revera μακροβιώτερον, qui jam ante centum annos fato cedit. Quid enim, ſi Sol tum junior, eóque vegetior decuplo citius periodos ſuas evolverat? Quid ſi tum aër purior, & indè corporum gravitas validior effecerat, ut vel ipſa organa mechanica citatiores acciperent motus, adeóque cum noſtri temporis inſtrumentis comparata fidem ſuam fallerent? *Empedocles* quidem, apud *Plutarchum*, exiſtimâſſe dicitur Solem initio dies longè prolixiores effeciſſe. Sed minùs id rationi conſentaneum videtur, quia tales motus vertiginoſi ſenſim elangueſcere potiùs ſolent, quàm invaleſcere. Verum obiter hæc, & vix ſerio; revertamur in orbitam. Temporis (ſeu permanentiæ rerum in ſuo eſſe, ſtatu, motúve) quantitas, ut dictum eſt, à motu quolibet dignoſcitur, bene notorio, æquabili, (ſeu quoad partes ad hoc adhibitas ſibi conſtanter æquali ac ſimili) dein ſecundario è quibuſvis aliis motibus, qui cum illo comparati proportione correſpondent, è cæleſtibus imprimis, Solis potiſſimùm ac Lunæ. Adeò ut æqualia tempora ſint, in quibus eadem clepſydra ſemel ac iterum, vel æquè multis viſibus exhauritur; aut in quibus

eadem

Nec per se quenquam tempus sentire fatendum est
Semotum ab rerum motu placidáque quiete;

Haud malè dixit *Lucretius*. & *Philosophus ipse*; Ὅταν γὰρ αὐτὸ μηδὲν
Phys. IV. 16. μεταβάλλωμεν τὴν διάνοιαν, ἢ λάθωμεν μεταβάλλοντες, οὐ δοκεῖ ἡμῖν γεγονέναι
χρόνος. Rectè quidem hoc, non videtur nobis, non apparet à somno excitatis quantum temporis intercessit; at non hinc rectè colligitur, Φανερὸν ὅτι οὐκ ἔστιν ἄνευ κινήσεως καὶ μεταβολῆς ὁ χρόνος. Non persentiscimus, ergò non est, illatio fallax, & fallax somnus, qui fecit ut nos duo semota temporis instantia connecteremus. interim verissimum illud; ὅση ἡ κίνησις, τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος ἀεὶ δοκεῖ γεγονέναι, quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitisse; neque quum tantum tempus dicimus, aliud consuevimus intelligere, quam tantum motum intercedere potuisse, cujus scilicet extensioni continuò successivæ rerum permanentiam imaginamur coëxtendi. Cæterùm quia tempus alveo semper æquali, non per vices nunc segniùs, tunc rapidiùs præterlabi concipimus (admissâ siquidem illâ disparitate nullam omninò computationem, aut dimensionem admitteret) non ideò motus omnis æquè determinandæ dignoscendæque temporis quantitati censeatur accommodatus, at is præsertim qui summè simplex & uniformis æquabili semper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, pérque medium uniforme delato. Quare tempori determinando tale quiddam mobile deligendum est, quod saltem quoad motûs sui periodos æqualem constanter impetum servat; & per æquale spatium decurrit. Et ad communem quidem usum accipiendus est ejusmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obvius, & sensus omnium incurrens, qualis est motus syderum, imprimìs *Solis & Lunæ*, mirificè sibi per omnia constans, & orbi terrarum conspicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ suffragio deputatus, at divino Creatoris consilio aptus natus est huic usui; à quo nempe pronunciatum legimus: *Fiant luminaria in firmamento Cæli, & dividant diem ac noctem, & sint in signa, & tempora, & dies, &*
Gen. 1. 14. *annos.* At quomodò, dices, cognoscetur *æquabili solem motu ferri, & unum puta diem, aut annum alteri penitus exæquari, vel æqui temporaneum esse?* Respondeo non aliter hoc (excipiendo quòd à divino testimonio colligatur) nobis innotescere, quàm cum aliis æqualibus motibus ipsum solis motum contendendo. Si nempe deprehendatur solis motus in horologio solari (quod spatiorum à sole in circulis æquatori parallelis percursorum penè certo ac exquisitè quantitates indicat)

indicat) cùm organi cujuſvis horodeictici, ſatis accuratè conſtructi, motibus conſentire. Talis enim machina è fabrica ſua comparata eſt, ſecundum motûs ſui repetitiones ſuccedaneas, æquâliter moveri; *Clepſydram* puta dimetiendæ diei, vel horæ deſtinatam; & quoniam in hac aqua, vel arena quoad quantitatem ſuam, & figuram, vimque deſcendendi prorſus eadem manet; nec non vaſculum continens, & meatus ipſam tranſmittens haud omnino variantur, tantillo ſaltem tempore, pérque temperiem aëris conſimilem, nec ideò cauſa ſubeſt ulla, cur non æquales in ſingulis effluxibus motus obire concedatur; ergò ſi compertum ſit, Solares motus, ſeu quoad integras periodos, ſeu quoad partes ipſarum proportionales, organi talis repetitionibus exquiſitè congruere, merito pronunciandum eſt, eos prorſus æquabiles, & uniformes fore. Ex quo diſcurſu liquere videtur, id quod fortè hôn nemini mirum videatur, cæleſtia corpora non eſſe, ex parte rei propriéque loquendo, primarias & originales temporis menſuras; aſt illos potius motus, qui prope nos ſenſibus obverſantur, & experimentis ſubjacent noſtris, cùm horum ope cæleſtium motuum regularitatem dijudicemus. Nè quidem ipſe Sol temporis idoneus judex, aut teſtis αὐτόπτης eſt, niſi quatenus horariæ machinæ ſuffragio veracitatem ſuam adteſtatur. Nec ſanè, quod obiter interpono, poteſt ullo pacto ſciri num periodi ſyderum ante multa ſecula tranſcurſæ noſtri ſeculi revolutionibus omnino pares fuerint; nemo ſcilicet aſſerat certò *Methuſelam* illum qui tantum non mille vitæ tranſegit annos, eo fuiſſe revera μακροβιώτερον, qui jam ante centum annos fato cedit. Quid enim, ſi Sol tum junior, eóque vegetior decuplo citius periodos ſuas evolverat? Quid ſi tum aër purior, & indè corporum gravitas validior effecerat, ut vel ipſa organa mechanica citatiores acciperent motus, adeóque cum noſtri temporis inſtrumentis comparata fidem ſuam fallerent? *Empedocles* quidem, apud *Plutarchum*, exiſtimâſſe dicitur Solem initio dies longè prolixiores effeciſſe. Sed minùs id rationi conſentaneum videtur, quia tales motus vertiginoſi ſenſim elangueſcere potius ſolent, quàm invaleſcere. Verum obiter hæc, & vix ſerio; revertamur in orbitam. Temporis (ſeu permanentiæ rerum in ſuo eſſe, ſtatu, motúve) quantitas, ut dictum eſt, à motu quolibet dignoſcitur, bene notorio, æquabili, (ſeu quoad partes ad hoc adhibitas ſibi conſtanter æquali ac ſimili) dein ſecundario è quibuſvis aliis motibus, qui cum illo comparati proportione correſpondent, è cæleſtibus imprimis, Solis potiſſimùm ac Lunæ. Adeò ut æqualia tempora ſint, in quibus eadem clepſydra ſemel ac iterum, vel æquè multis viſibus exhauritur; aut in quibus

eadem

eadem ſydera periodos eaſdem, aut ejuſdem periodi partes æquales abſolvunt; inæqualia verò juxta quamcunque proportionem, in quibus ſimiliter, ſeu proportionaliter inæquales periodi conſumuntur. Neque quiſquam objiciat tempus communiter haberi pro menſura motûs, & conſequenter ad hoc motûs differentias (velocioris, tardioris, accelerati, retardati) adiumendo tempus ut præcognitum definiri; nec ideò temporis quantitatem è motu, ſed motûs quantitatem à tempore determinari; nil enim obſtat quo minùs tempus & motus hæc ſibi mutuò præſtent officia. Sanè veluti ſpatium ex aliqua primùm magnitudine metimur, & quantum ſit diſcimus, è ſpatio poſteà reliquas ei congruas magnitudines æſtimanus; ità tempus primò taxamus è motu quodam, poſteà motus reliquos ex eo dijudicamus; quod planè nihil eſt aliud quàm mediante tempore motus alios cum aliis comparare; ſicut & mediante ſpatio magnitudinum inter ſe rationes inveſtigamus. Qui nimirum è temporum proportione motuum colligit proportionem, nil aliud quàm ex organorum horologicorum, vel ex Solarium motuum ſimul decurſorum proportione dictam elicit motuum rationem. Quod certè vidit, & exertè docuit *Ariſtoteles*: ὃ μόνον (inquit) τῷ κίνησιν τῷ χρόνῳ μετρεῖσθαι, ἀλλὰ καὶ τῇ κινήσει ὁ χρόνον διὰ τὸ ὁρίζειν ἀλλήλων. Porrò, quia tempus, ut oſtenſum, eſt quantum uniformiter extenſum, cujus omnes partes æquabilis motûs partibus reſpectivis, ſeu ſpatiorum æquabili motu peractorum partibus proportione reſpondent, poſſit id quàm optimè per magnitudinem quamlibet ὁμοιομερῆ repræſentari, hoc eſt menti noſtræ ſeu phantaſiæ proponi; per ſimpliciſſimas præſertim, quales ſunt linea recta, & circularis; quibuſcum etiam & tempore ſimilitudines & analogiæ non paucæ intercedunt. Præterquam enim quòd tempus partes habet omnino ſimilares, rationi conſentaneum eſt ipſum velut unicâ dimenſione præditum quantum conſiderare; ipſum enim velut ex ſimplici ſupervenientium momentorum additamento, vel ex unius momenti quaſi continuo fluxu conſtitutum imaginamur, & ſolam proinde longitudinem ei ſolemus attribuere; nec ejus quantitatem alias quàm ex lineæ decurſæ longitudine determinamus. Sicut, inquam, linea puncti promoti cenſetur veſtigium, à puncto habens quòd aliquatenus diviſibilis ſit, à motu verò quòd uno modo, ſecundum longitudinem, dividi poſſit; ità tempus velut inſtantis continuò labentis veſtigium concipiatur, ab inſtante nonnullam indiviſibilitatem habens, à ſucceſſivo fluxu quòd eatenus diſpertiri queat. Et ſicuti lineæ quantitas ab unica longitudine pendet motum conſequente, ità temporis quantitas ab unica conſectatur velut in longum expor-

Phyſ. IV. 18.

exporrecta ſucceſſione; quam ſpatii decurſi longitudo demonſtrat, ac determinat. Tempus itaque per rectam lineam ſemper deſignabimus; arbitrariè quidem initio ſumptam & expoſitam, at cujus partes proportionalibus temporis partibus, & puncta temporis inſtantibus reſpectivis juſtè reſpondebunt, & iis appoſitè repræſentandis inſervient. His de tempore prælibatis ad conſiderandam vim motûs effectivam procedimus, quæ ſanè (quæcunque ſit ejus natura, vel undicunque procedat, nam iſta *Phyſicis* diſquirenda relinquimus) merito quoque ſeu quantum quid concipitur, & ſicut alia quanta computo ſubjicitur. Etenim experientiâ compertiſſimum eſt, ſæpe duorum mobilium ab eodem termino per eandem orbitam delatorum alterum alteri prævertere, ſeu majus eodem tempore ſpatium conficere. Nec aliunde poteſt hoc procedere, quàm à majori vi, ſeu potentia motiva, quâ præcellit alterum mobile, cujúſque gratiâ velocius dicitur. Et quia perſpicuum eſt nil impedire, quin ſecundum omnimodas proportiones contingat hic ſpatiorum una peractorum exceſſus, ideò vis hæc jure concipiatur in partes quaſlibet (quas & ſicuti partes cujuſcunque qualitatis intenſivas ſuccinctæ diſtinctionis ergò gradus appellare licet, & conſuetum eſt) in partes, inquam, quaſlibet infinitas, aut indefinitas diviſibilis concipiatur; quas inter ſe nectens, & à ſe dirimens communis terminus, vel (juxta ſuppoſitionem quòd quanta conſtant ex infinitis atomis) pars abſolutè minima dicatur quies, hoc eſt ſumma tarditas, aut infima velocitas; è cujus ſucceſcentia, vel intenſione continua velocitatis gradus quilibet eo modo concipiatur aggregari, vel produci, quo linea è punctorum appoſitione, vel motu, tempus ex inſtantium ſucceſſione vel fluxu progenitum imaginamur. Unde rem abſolutè conſiderando, quo vis hujuſce quantitas menti ſeu phantaſiæ rectè proponatur, ſufficit ejus vice magnitudinem quamvis regularem exhibere (hoc eſt talem, in cujus partibus quamvis differentiam, quamlibétque proportionem clarè promptéque valeamus apprehendere) ſimplicitatis adeò perſpicuitatiſque causâ cuilibet ejus repræſentando gradui recta linea cum primis accuratè quadrat. Ità quidem in ſe generatim & abſoluta ſpectata vis iſta tempus non implicat, eóque ſecluſo concipi poteſt (in quolibet enim temporis inſtanti, pérque quodcunque temporis intervallum eâ prædituм mobile concipiatur) at quatenus computabilis, ac æſtimio Mathematico ſubdita, quâ ratione velocitas dicitur, cum ſpatio tempus adſignificat; è quibus nempe quantitas ejus dijudicatur, ac diſcernitur definitur idcircò velocitas potentia, quâ mobile ſpatium aliquod in aliquo tempore pertranſire poteſt. Unde conſectarium ſingularem

gularem velocitatis cujuſpiam quantitatem nec ex ſola confecti ſpatii, nec ex abſumpti temporis quantitate dignoſci poſſe (quælibet enim velocitas aliquo tempore quodvis aſſignatum ſpatium emetiatur) aſt ex ſpatii ſimul ac temporis quantitatibus ad calculum redactis eam innoteſcere; ſicut & viciſſim temporis abſumpti quantitas non niſi ſpatii ſimul ac velocitatis agnitis quantitatibus determinetur. Quinimò ſpatii quoque quantitas (quatenus hoc modo per motum dignoſcibilis eſt) nec è ſola definitæ velocitatis quantitate, nec ab aſſignato tanto tempore dependet, aſt ab utriuſque ratione conjuncta. Et quidem ut hæc quomodo ſe reſpiciant amplius exponamus, ſpatii quatenus hoc modo computatur quantitas eo ferè dignoſcitur modo, quo è dimenſionibus ſuis quanta fit ſuperficies innoteſcit; è quantitate ſcilicet unius lineæ, (quæ longitudinem ejus aut altitudinem oſtentat) & è quantitatibus ſingularum invicem ſibi parallelarum linearum, quæ per iſtius lineæ puncta quæque tranſeuntes ſuperficiem totam quodammodo conſtituunt, & componunt; eam ſaltem limitant atque determinant; hoc eſt quaſi per ductum ſingularum ejuſmodi linearum in reſpectiva dictæ lineæ puncta. Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo diſcernuntur, quo ex ſuperficiei, & unius cui applicatur dimenſionis quantitate diſcernitur quanta ſit reliqua dimenſio (ubivis, inquam, aut ſaltem alicubi quanta, nam fieri poteſt ut reliqua dimenſio quatenus per omnia prioris dimenſionis puncta diffunditur, ſibi paſſim diſpar & difformis ſit; quid velim è veſtigio conſtabit, nam utilis hæc conſideratio poſtulat enucleatiùs declarari. Omni temporis inſtanti, ſeu indefinitè parvæ temporis particulæ (inſtanti dico, vel indefinitæ particulæ, nam utì nihil admodum refert, utrùm lineam ex innumeris punctis, an ex indefinitè parvis lineolis compoſitam intelligamus, ità perinde eſt, utrùm tempus ex inſtantibus, an ex innumeris minutis tempuſculis conflatum ſupponamus; nos ſaltem brevitati conſulentes pro temporibus quantumlibet exiguis inſtantia, hoc eſt pro tempuſcula repræſentantibus lineolis puncta non verebimur uſurpare) cuilibet dico temporis momento competit velocitatis aliquis gradus, quem mobile tunc habere concipiendum eſt; cui gradui reſpondet aliqua decurſi ſpatii longitudo (nam hic mobile tanquam punctum, & ſpatium proinde tantummodò ceu longum conſideramus) quia verò temporis momenta quoad rem ipſam neutiquam à ſe dependent, ſupponi poterit in proximo inſtanti mobile gradum velocitatis alium (alium inquam vel æqualem priori, vel in quavis proportione diverſum) admittere, cui proinde reſpondebit alia ſpatii longitudo, tali proportione reſpiciens priorem, quali velo-

velocitatis hic gradus præcedentem. Quum enim temporis inſtantia prorſus æqualia ſint inter ſe, ſpatialium longitudinum ratio à ſola velocitatem ratione dependebit, eique proinde par erit, aut ſimilis (quod niſi pro veriſſimo ſumatur, haud ullo modo menſurari poſſit velocitas; nam à ſola ſpatiorum eodem tempore decurſorum (vel eodem inſtanti) proportione velocitatum inter ſe collatarum immediatè vel mediatè ratio taxatur, & altera alterius reſpectu denominatur tanta) ſimiliter ſi per omnia temporis cujuſvis momenta qui conveniunt ipſis velocitatis gradus aſſignentur, aggregabitur ex iis quantum quiddam, cujus partibus quibuſvis decurſorum ſpatiorum partes reſpectivæ, hoc eſt iiſdem temporibus reſpondentes particulæ, juſtè proportionantur, adeóque quantum è gradibus iſtis conſtans repræſentans magnitudo ſpatium quoque decurſum repræſentare poſſit; quatenus nempe qualem ſpatii partes temporibus ſingulis peractæ proportionem inter ſe ſervant, exactè referat. Quum igitur, utpote quàm æquabiliſſimè fluens per lineam, ut præmonuimus, rectam aptiſſimè repræſentetur, & qui in ſingulis temporis inſtantibus habentur alii ac alii, ſibimet æquales; aut inæquales, velocitatis gradus per lineas itidem, ut priùs etiam inſinuatum eſt, rectas exprimantur, & cùm hi velocitatis gradus ſingula temporis momenta alii ac alii permeent, independenter à ſe invicem ac impermixtè; itaque ſi per lineæ tempus repræſentantis omnia puncta trajiciantur rectæ ſic diſpoſitæ, ut altera nulla nulli alteri coïncidat, hoc eſt in ſitu parallelo; quæ reſultat hinc ſuperficies plana (pro quantitate temporis, & poſitorum velocitatis graduum ratione determinata) graduum velocitatis aggregatum exactiſſimè referet; cujus ſuperficiei partes cum reſpectivis (ut prædictum) ſpatii peracti partibus proportionales ſint, poterit id ſpatio quoque repræſentando commodiſſimè adaptari. Iſta verò ſuperficies brevitatis causâ dehinc appellabitur velocitas aggregata, vel ſpatii repræſentativa. Neque quenquam afficiat, nam ſubmovenda nobis hæc remora, quod diximus in ſingulis temporis inſtantibus longitudinem aliquam confici, quaſi dari poſſe motum inſtantaneum affirmarem. Nam poſito tempora è momentis componi, etiam lineæ componentur è punctis; quòd ſi lineæ inæquales componantur è punctis infinitis, ſibimet æquinumeris, neceſſariò ſequitur linearum puncta, juxta ſimilem cum ipſis proportionem inæqualia fore, adeóque per longitudines in æquitemporaneis momentis decurſas duntaxat intelligenda ſunt ejuſmodi inæqualia puncta, è quibus tota decurſa longitudo quaſi conflatur. Sin hoc abſonum cuipiam videatur, & nullo ſenſu motus admittatur in-

ſtantaneus, eò recurrendum ut per inſtantias nil aliud, quàm indefinitas temporis particulas intelligamus; quibus reſpondeant certo velocitatis gradu, alio atque alio, percurſa indefinitè minuta ſpatiola velocitatis gradibus adproportionata; tum autem repræſentando ſingulo cuipiam velocitatis gradui per tempuſculum aliquod retento, loco lineæ rectæ ſubſtituatur oportet exiguum rectangulum dicto tempuſculo applicatum. Perinde fuerit, ac eodem recidet hoc an illo modo ſe res habeat; aſt ſimplicior & clarior videtur iſte modus, quem priùs expoſuimus, cui proinde poſthac inſiſtemus. Ut redeam, & recolligam; ſicuti per omnia lineæ rectæ puncta traduci poſſunt parallelæ rectæ, magnitudine pro lubitu pares, vel impares, è quibus aggregatis ſuperficiale planum exurgat, ità ad ſingula temporis inſtantia applicari poſſunt velocitatis gradus diverſi, pares vel impares, prout mobile per totam ſuam lationem vel eundem impetum retinere, vel aliquando varium adſciſſere ſupponatur, utcunque creſcendo vel decreſcendo. Si velocitatem ſemper eandem conſervare dicatur, facilè patet è dictis velocitatem aggregatam definito cuivis tempori convenientem rectiſſimè per figuram parallelogrammam exprimi, qualis eſt AZZE, in qua latus AE temporis definiti vicem obit, reliquum AZ, eique parallelæ rectæ omnes BZ, CZ, DZ, EZ velocitatis gradus ſingulos per ſingula temporis momenta penetrantes, in hoc ſcilicet caſu pares, exhibent. Poſſunt etiam, ut dictum, parallelogramma AZZB, AZZC, AZZD, AZZE ſpatia reſpectivis temporibus AB, AC, AD, AE decurſa appoſitè deſignare. E qua conſideratione ſola, vel intuitu primo motûs hujuſmodi, quem æquabilem, & uniformem vocitant, omnia ſymptomata deduci poſſunt. Quales ſunt: quòd æquali perpetuò velocitate tranſmiſſa ſpatia ſeſe habent ut tempora: Quòd æquali tempore peracta ſpatia ſeſe habent ut velocitates; & vicißim: Si ſpatia ſunt ut velocitates tempora fore æqualia; ſi ut tempora, velocitates æquari. Et ſi æqualia ſpatia fuerint, tempora velocitatibus proportione reciprocari; contráque, ſi tempora velocitatibus proportione reciprocentur, ſpatia ſibimet exæquari. Spatia denique quælibet compoſitam habere rationem è rationibus velocitatum & temporum; nec non, ſubducendo rationem temporum è ratione ſpatiorum reſiduam manere rationem velocitatum; vel ſubducendo rationem velocitatum relinqui rationem temporum. Hæc enim parallelogrammorum inter ſe comparatorum affectiones ſunt (æquiangulorum intelligo parallelogrammorum; nam ubi repræſentativa, hæc parallelogramma conferuntur inter ſe, æquiangula conſtituantur oportet; alioqui cùm

Fig. 1.

ſin-

ſingillatim ſpectantur; nihil refert quinam angulus ſtatuatur) hæc, inquam, è parallelogrammorum natura liquent, & ex iis quæ poſuimus ſponte conſectantur; ut nullam aliam demonſtrationem requirere videantur. Et ſanè quoad omnes Mathematicæ καθ' ὑλὴν ſubditas (hoc eſt utcunque quantitatem involventes) materias cùm magnâ facilitate Theoremata perſpicere, tum ſummo eadem compendio demonſtrare poterit, quiſquis contemplationi ſuæ ſubjecta cujuſcunque generis quanta ad analogicas magnitudines ritè congruéque novit redigere. Quòd ſi porrò velocitatis gradus continuò per ſingula temporis inſtantia ſupponantur æqualiter adaugeri, vel imminui, à gradu minimo, ſeu quiete, definitum ad velocitatis gradum, vel à definito tali gradu ad quietem; conſimili pacto poterit aggregata velocitas per quamvis ſuperficiem æqualiter à puncto creſcentem ad definitam magnitudine lineam; vel eodem retrogradè paſſu decreſcentem, exhiberi; ſimpliciſſimè verò, & optimè per triangulum rectilineum; ut puta per triangulum A E Y, in quo crus A E tempus denotat; ejúſque punctis applicatæ lineæ parallelæ B Y, C Y, D Y, E Y gradus velocitatis ſingulis inſtantibus congruos à puncto A (quod quietem, vel infimam velocitatem refert) ad definitum gradum lineâ maximâ E Y repræſentatum æqualiter increſcentes; vel ab eadem E Y retrò ad punctum A quietis repræſentativum declinantes. Sed & pari jure, quo prius, trigona A B Y, A C Y, A D Y, A E Y per reſpectiva ab initio tempora decurſis ſpatiis repræſentandis inſervient. Et conſequenter, ſi velocitas æqualiter à definito gradu ad gradum definitum ſupponatur augeri, vel diminui, repræſentabitur tam aggregata velocitas, quàm ſpatium ei reſpondens à figura quadrangula Trapezia, qualis eſt C Y Y E, in figura priùs adhibita. Hinc, non ſecùs quàm in præcedentibus, hujuſmodi motûs quem uniformiter acceleratum nomine perquam apto *Galilæus* nuncupavit) affectiones omnes præcipuæ facilimè deprehendentur, atque demonſtrabuntur; cujuſmodi ſunt: Quòd æquali tempore conficietur æquale ſpatium per motum à quiete uniformiter acceleratum, ac per ipſum motum uniformem, modò velocitas hujus ſubdupla ſit velocitatis, quam ille maximam habet. Quòd ſpatia motu à quiete uniformiter accelerato peracta, ſeſe habent ut *Quadrata temporum* (vel in duplicata temporum proportione.) Et diverſos hoc modo acceleratos motus comparando: Quòd ab illis tranſacta ſpatia habeant rationem è rationibus temporum, & velocitatum maximarum: Et ſimilia talia vel his connexa, vel indè conſequentia, quæ triangulis conveniunt inter ſe quoad ſuas, & quoad laterum rationes comparatis; quæ ex poſitis haud difficilè perſpiciantur, ac demonſtrentur. Fig. 1.

ſtrentur. Porrò, non abſimiliter ſi velocitatis gradus continuâ per ſingula temporis inſtantia ſucceſſione, à quiete ad definitum gradum, vel retrogradè, creſcere concipiantur, aut decreſcere juxta progreſſionem numerorum quadraticorum repræſentatur tum optimè velocitas aggregata, ſicut & ſpatium hujuſmodi motu confectum, à complemento Semiparabolæ, qualis eſt AEX, cujus vertex A quietem (ſeu motûs ac temporis initium) tangens AE tempus definitum, linea BX primum velocitatis accreſcentis gradum (qui ſe habet ut 1.) proxima CX ſecundum gradum (habentem ſe ut 4.) ſubſequens DX (qui ſe habet ut 9.) & ità porrò uſque ad ultimum EX: Id quod ex notiſſima parabolæ proprietate manifeſtum eſt. Eodem planè modo quivis ſuppoſiti velocitatis gradus, utcunque creſcentis aut decreſcentis, continuò vel interruptè, quovis, inquam, imaginabili modo per lineas rectas ad temporis repræſentatricem rectam applicatas certiſſimo, commodiſſimòque modo deſignari poſſunt, aſſervatâ quam quis adſignare voluerit proportione; ſic ut inde cognitâ ſpatii repræſentantis dimenſione, ſpatii per motum confecti quantitas facilius innoteſcat; & reciprocè, cognitâ ſpatii dicti naturâ velocitatis ac temporis quantitatibus dignoſcendis aliqua lux affulgeat: Quæ quidem poſthac dicendorum intellectui neceſſaria, totique motuum theoriæ non parùm ut videtur utilia viſum eſt paullo fuſiùs expoſita præmittere. Quâ perfunctus operâ pedem figo.

Fig. 2.

LECT.

LECT. II.

VArios, quibus productæ concipiantur magnitudines aggreſſi modos conſiderare, primum & præcipuum attingere cæpimus illum, qui motu peragitur locali. Cum vero ſoleant *Mathematici* diverſi modos, è quibus aliæ ac aliæ magnitudines reſultant, motus adſumere ceu poſſibiles, duos ad fontes digitum intendimus, è quibus iſtæ motuum differentiæ ſcaturiunt, modum lationis ipſum, & quantitatem vis motivæ; quorum poſteriorem haud ita clarum & apertum nuperrimè conati ſumus recludere, limpidúmque reddere. Jam differentias quas aſſumunt ipſas proſequemur, & quo pacto generationi magnitudinum inſervire poſſint oſtendemus. Lationis modum ſpectando generantur magnitudines vel per motus ſimplices, vel per motus compoſitos, vel ex concurſu motuum (nam compoſitionem à concurſu diſtinguo, quæ tamen à nonnullis confundúntur.) De ſimplicium motuum hypotheſibus, ac effectis primò videamus. Simplicium motuum duo genera ſunt, φορὰ, & μετάβασις, progreſſio, & circumlatio. Sub progreſſivo motu comprehenditur motus omnis, qui nullum fixum locum (loci nomine quamvis magnitudinem, etiam punctum adnumerans, intelligo,) reſpicit, cui velut innectitur, ac affigitur; ſeu directus iſte motus ſit, ſeu reflexus, ſeu refractus; ſive callem certum perſequatur, ſive inconſtanter deſultet, divagetur, exorbitet. Quia vero penitus irregularium in arte nulla ratio poteſt haberi, ſufficit *Mathematicis* ſupponere magnitudinem quamcunque progredi poſſe juxta deſignatam quamlibet orbitam; ut *v. g.* Quod punctum *in linea recta, circulari, elliptica, ſpirali, vel alia quavis præſtituta queat incedere.* Verùm præcipuæ, hoc eſt maximi, frequentiſſimique pro magnitudinibus efformandis uſûs, circa hujuſmodi motus quas *Mathematici* præſtruunt hypotheſes, ſunt hæ: Quòd punctum à præfixo termino in linea recta quouſque libuerit adſignare directè progredi queat, quali motu perſpicuum eſt lineam rectam deſcribi:

deſcribi: Quòd linea recta per alterius cujuſvis lineæ longitudinem ità procedere poſſit, ut ſitum interea parallelum perpetuò ſervet (hoc eſt ut ipſa juxta poſitionem, quam in quolibet temporis momento ſortitur, parallela ſit ſibi ſecundum poſitionem ſuam in alio quovis temporis momento:) Item, quod linea quævis (definitè vel indefinitè protenſa, quod in omnibus intelligendum) motu directo, itidem ſibi parallelo, progredi poſſit (directo inquam, hoc eſt ut ejus ſingula puncta lineas rectas deſcribant) qui ſanè duo motus ſibimet æquivalent, eundémque procreant effectum eorúmque alterutro productæ concipiantur illæ, quæ præ cæteris æquabiles, ac uniformes haberi merentur ſuperficies; quales ſunt in plano *Superficies parallelogrammæ* (ſeu penitus rectilineæ, ſive mixtæ) in Solido (ut ità dicam, vel non in uno plano delineatæ) *Superficies Priſmaticæ, Cylindricæque*, tum Fig. 3. quæ ſtricto, tum quæ latiori ſignificatu dicuntur. Sit in exemplum primò recta linea B C, cui inſiſtens recta A B per ipſam B C feratur, ſibi continuò parallela, donec puncto B ad C promoto recta A B ipſi D C ad A B parallelæ congruat. Manifeſtum eſt hujuſmodi motu procreari *figuram planam parallelogrammam* A B C D. Patet etiam quodlibet aſſumptum in A B punctum, ut E, rectam lineam deſcribere, cujus partes E E rectis A B interceptæ, rectæ B C partibus B B, per eaſdem reſpectivè rectas A B interceptis (hoc eſt eodem tempore à puncto B decurſis) æquantur. Neque minùs patet, ſi vice verſâ recta B C per ipſam B A feratur, eandem ſuperficiem de- Fig. 4. lineari; omniáque rectæ B C puncta (ceu F) rectas lineas effingere; nec non harum partes F F parallelis B C interceptas reſpectivis lineæ A B partibus B B adæquari. (Notetur autem abhinc brevitatis ergò tam in his, quàm in ſimilibus caſibus harum linearum illam, quæ motu ſuo magnitudinem deſcribit à me *Genetricem* dici; alteram autem, juxta quam, vel cui inſiſtens, prior defertur, *Directricem* appellari; quia motæ lineæ proceſſus ab ea dirigitur, vel ad eam accommodatur.) Fig. 5. Sit rurſus linea quæpiam curva (velut arcus circularis) B C, cui in eodem plano inſiſtat linea recta A B; & per curvam B C continuò deferatur recta A B, ſibimet æquidiſtans, donec punctum B ad C pertigerit, & recta A B demum rectæ D C ad ipſam A B primò poſitam parallelæ congruerit; deſcribetur hoc motu figura quoque plano (latiore ſignificatu) parallelogramma; quia ſcilicet adverſa hujus figuræ latera ſibi parallela ſunt, recta A B rectæ D C, & curva A D curvæ B C. Nam & hîc ſingula quæque *Genetricis* rectæ puncta (velut E) lineas deſcribent *directrici* B C ſimiles & æquales; cùm integras, tum iiſdem parallelis A B interceptas partes; ſi enim duo puncta

puncta quævis E E rectâ lineâ connectantur, iisque respondentia puncta B B rectâ quoque jungantur; quoniam rectæ E B sibimet æquantur (etenim nil aliud sunt, quam eadem ipsa linea diversum situm obtinens) ac parallelæ secundum *hypothesin*, erunt rectæ E E, B B æquales ac parallelæ. Unde patet curvas E E, B B adæquari sibimet, & assimilari. Adæquari quia subtensæ omnes EE subtensis B B singillatim æquantur; assimilari, quia rectæ A B cum subtensis adjacentibus respectivis E E, & B B pares angulos constituunt, adeóque rectæ ipsæ E E pares iis, quos rectæ B B; ipsæ illæ cum seipsis, & hæ cum seipsis (nam in hujusmodi proportionalitate partium, & angulorum æqualitate, sicut alibi fortasse luculentius & fusius disseremus, omnis consistit linearum, & quarumcunque magnitudinum similitudo.) Quod si vice commutatâ linea curva B C fiat linea *Genetrix*, & recta B A *directrix*, hoc est si B C per B A sibi parallela feratur, producetur eadem ipsissima parallelogramma Superficies; & singula rectæ B C puncta, veluti F, rectas lineas ad B A parallelas describent; neque non interceptæ F F respectivis B B pares erunt; quod & pari modo ex supposito perpetuo curvæ BC parallelismo facilè consectatur. Sit denique curva quævis (vel è rectis angulos efficientibus composita, quæ curvæ quoque nomen meritò ferat; *Archimedes* saltem è rectis compositas lineas, uti figurarum circulis inscriptarum aut adscriptarum perimetros, καμπυλῶν χαμμῶν nomine complectitur; ut & viciſſim curvæ quævis lineæ censeri possunt è rectis, innumeris quidem illis indefinitè parvis, adjacentibus, & deinceps secum angulos efficientibus, conflatæ) sit, inquam, talis aliqua curva B C, in plano quovis constituta, tum in alio plano, vel super lineæ B C planum ut libet elevata, recta A B sibi continuò feratur parallela, modo quo semel ac iterum ostendimus; describetur hujusmodi motu *Superficies cylindrica* (vel certè *prismatica*, si *linea directrix* è rectis ponatur composita) & *cylindrica* quidem strictè dicta, si *directrix fuerit linea circularis*, aut *elliptica*; latiore verò sensu talis, si curva fuerit alterius generis ut *parabolica* puta, vel *hyperbolica*, vel alia quæpiam. In hoc autem motu lineæ quoque genetricis singula puncta similes & æquales describunt curvæ directrici lineas; æquales (ut in mox præcedente discursu) quoniam E B pares ac parallelæ sunt; adeóque E E, B B quoque pares, ac parallelæ; similes; *quoniam etiam anguli E E E, angulis B B B æquantur. Quinetiam reciprocè describatur eadem Superficies ponendo curvam B C per rectam A B parallelos deportari. Quomodo singula quoque curvæ B C puncta rectas parallelas & pares interceptis respectivis

Fig. 5.

Fig. 6.

10. XI. Elem.

rectæ

rectæ A B partibus delineabunt, pariter ut antehac in figuræ planæ exemplo commonſtratum eſt; unde ſi ſuperficies hoc modo procreatæ à plano quolibet ad rectam ſeu genetricem, ſeu directricem (quam ubique ſitam Superficiei productæ latus appellare licet) parallelo ſecetur, ſectio communis duabus rectis parallelis conſtabit æqualibus inter ſe. De Superficiebus autem ità progenitis obſervatu dignum eſt (nec enim planè nudas magnitudinum generationes indigitare, ſed & generales nonnullas ipſarum affectiones è diverſis reſultantes generandi modis inſinuare propoſitum eſt nobis) quòd ſi linea directrix recta ſit (ut in figura per literam Z diſcriminata) Superficiei productæ partes parallelis lineis genetricibus interjectæ reſpectivis directricis lineæ partibus ſemper proportionales ſunt (ſuperficies nempe B C C B reſpectivis rectis B B:) At ſi linea curva pro directrice habeatur (ut in figura Y) non ſemper eveniet, ut interceptæ genetricibus rectis Superficies interceptis curvæ directricis partibus proportionentur; at ſaltem accidet hoc, cùm recta genetrix A B æqualiter ad curvam B C ubique, vel ſecundum omnia ejus puncta inclinatur; quomodo fit in cylindri cujuſcunque, laxè vel ſtrictè dicti, recti ſuperficie; quia tum recta genetrix omnibus curvæ punctis (hoc eſt omnibus eam ad dicta puncta tangentibus, eíve ſubtenſis rectis eſt perpendicularis.) Verum ſi, in exemplum, curva B C ponatur arcus circularis, qui dividatur æqualiter ad puncta B, non erunt neceſſariò ſuperficies A B B A peripheriis æqualibus B B inſiſtentes inter ſe pares, quia (præterquam in caſu prædicto cylindri recti) rectæ A B ubique ad puncta B inæqualiter inclinantur (unam quamvis inclinationem cum alia conferendo) angulos nempe cum tangentibus ad B aliis ac aliis, & cum ſubtenſis B B inæquales efficiunt. E qua re pendet *inſuperabilis illa difficultas*, quacum conflictantur, qui *cylindricas obliquas ſuperficies conantur dimetiri, ſeu cum Cylindricis Superficiebus rectis, aliiſve quadantenus cognitis Superficiebus quoad proportionem comparare.* Supponunt denique conſimili pacto ſuperficiem quamvis planam directo motu ſibi parallelo progredi, ſcilicet ut prædicto modo, ſingula ipſius puncta lineas rectas deſcribant, inter ſe pares, ac parallelas; vel ut ejus ſingulæ rectæ (id quod indè conſectatur) planas Superficies parallelogrammas effingant; cujuſmodi motu deſcribuntur priſmatica quæque cylindricáque corpora; illa nimirum ipſa, de quorum Superficiebus mox egimus, quibúſque ſimili jure poſſunt adaptari, quæ Superficiebus iſtis oſtendimus convenire. Veluti quòd parallelis planis interjectæ Superficies ipſorum, & ipſa corpora lateribus ſuis (ſeu directricis rectæ partibus reſpectivis) proportionantur. Quòd & ſi definita hujuſmodi corpora

Fig. 6.

planis

planis laterum alicui parallelis ſecentur, communes ſectiones erunt *Parallelogramma* (quale eſt E E B B.) Quin, ut paucis complectar multa, quæ *de Superficiebus aut Solidis Priſmaticis ac Cylindricis ſtrictè dictis generatim enunciantur aut probantur uſpiam*, quòd ea pleraque juſtam analogiam obſervando, univerſis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progreſſivo motu quidpiam ſuccurrit adjiciendum; quædam enim ἀνεπίγνωστα conſultò videntur reticenda. Porrò ſimplicis motûs alterum genus, quod adhibet *Matheſis*, eſt *circumlatio*, *ſeu motus converſivus*; qui tum ſcilicet efficitur, cùm dimotæ magnitudinis quiddam (ut punctum aliquod puta lineæ, vel Superficiei linea) fixum & immotum conſiſtit, dum ei velut innodata ac adſtricta tota reliqua magnitudo, juxta quamvis aſſignatam directionem, circumagitur. Cujuſmodi motûs generaliſſima proprietas eſt, ut quæque mobilis puncta dum in uno aliquo plano tranſversè moventur, circulares ſingula peripherias deſcribant; & quidem omnia, quæ in eodem uno, per fixum punctum tranſeunte plano moventur parallelas, ſeu concentricas, & ſimiles inter ſe; quæ vero in diverſis planis ſimiles, aut diſſimiles, prout hypotheſium exigit arbitraria diverſitas. Præ cæteris autem propria, maximéque naturalis eſt circumlatio, cùm ſingula mobilis puncta circulares unius ejuſdem circuli peripherias deſcribunt, hoc eſt cùm in uno cuncta plano circumferuntur; qualem certè tum ipſa natura ſponte concipit atque proſequitur, cùm nè rectos ſuos quos præſertim affectat motus exequatur ab immobili retinaculo prohibere; velut in pendulorum, & libris appenſorum motibus videre eſt; imò cùm objectâ quâvis reſiſtentiâ non ſatis facilè recto tramiti valet inhærere; ſicut in *rotarum*, *& vorticum*, *& turbinum*, *& in ipſorum fortaſſe ſyderum*, *motibus adparet*. Verùm hujuſmodi motuum generalem indolem haud ità promptum eſt verbis explicare. Præſtat ipſas quas accipiunt præcipuas hypotheſes percenſere. Aſſumunt primo rectam lineam in plano circa punctum quodvis in ipſa fixum poſſe circumferri, cujuſmodi motu patet omnia lineæ motæ puncta circulares peripherias deſcribere; ſingulas ab uno quovis deſcriptas ſingulis ab altero quolibet ſimul eodem tempore deſcriptis parallelas, & ſimiles. Ut ſi linea recta A B manente fixo puncto C circumferatur, ſingula puncta A, E, B peripherias circulares A A, E E, B B ſibi parallelas, & ſimiles omnes (iiſdem nimirum, aut æqualibus angulis ſubtenſas, quorum commune centrum, aut vertex C) deſcribent. Hoc autem modo conſtat procreari circulos, & ſectorum circularés areas (quales A C A, B C B,) ſed & annulos planos; qualis eſt is qui reſtat, ſi è circulo Fig. 7.

majore A A B B detrahatur minor circulus concentricus E E E E. E qua geneſi colligitur circulorum, & ſectorum circularium areas, è circularibus peripheriis, integris aut partialibus concentricis ac ſimilibus, conſtare tot numero quot radius puncta habet; quarum proinde calculum inèundo circularis areæ talis qualis dimenſio quàm facillimè reperitur; id quod non eſt hujus temporis ulterius exponere. Quinetiam ſupponunt lineam quamvis rectam, indefinitè protenſam, uno manente fixo ipſius puncto circa deſignatam quamvis in alio plano conſtitutam lineam, curvam aut è rectis compoſitam, revolvi, ſic ut ei nempe lineæ ſemper inſiſtat, vel eam quaſi lambat, aut perſtringat. Fig. 8. Sit, exempli causâ, linea recta A B indefinitè protenſa, & in ea fixum punctum V; & per V ſemper feratur linea A B juxta lineam quamlibet B C in alio plano collocatam; ità quidem ut aliquod lineæ mobilis punctum continuò lineæ B C inhæreat; ex hujuſmodi motu producetur curva Superficies (è planis ſaltem compoſita, quam & generali ratione, poſt *Archimedem*, curvam appellare nil vetat) quæ quidem ſi linea directrix tota componatur è definitè magnis rectis lineis, fiet *Superficies pyramidalis*, è triangulis ad verticem V concurrentibus aggregata; ſin circularis fuerit, aut conicarum ſectionum aliqua, Superficies evadet ſtrictè *conica*; ſin alterius generis aliqua, conica ſaltem extenſo latius ſignificatu dicatur; & à quibuſdam dicitur. Cujus quidem Superficiei proprietas eſt, ex ipſa generatione manifeſta, quòd ſi per fixum punctum V plano ſecetur, communis plani cum ipſa ſectio erit angulus rectilineus. Nam ſi planum ipſam ſecans per V lineæ directrici occurrat in punctis duobus, ut in D, E (occurret autem in duobus, aliàs Superficiem ipſam non ſecaret) ductæ rectæ V D, V E erunt tam in plano ſecante, quàm in curva Superficie; in plano, ex plani natura; in Superficie, quia genetrix eadem recta per harum terminos tranſit, ipſiſque proinde coincidit. In hujuſmodi verò motu poſito quòd lineæ rectæ à puncto fixo V (ſeu vertice) ad directricem lineam B C ductæ ſunt inæquales inter ſe, ſatis liquet lineam B C non à linea B delineari, vel perambulari, quia lineæ inæquales (ut V B, V E, V C) ſibi nequeunt congruere; adeóque punctum B progrediens ſupra, vel infra puncta B, E, C cadet; Fig. 8. ut nec eâdem inæqualitate ſuppoſitâ punctum quodvis aliud in V B puta G) motu ſuo lineam deſcribet lineæ directrici B C ſimilem (quare linea V B ſupponitur indefinitè protenſa) at verò ſi lineæ omnes, quæ ab V ad B C duci poſſunt (quas Superficiei propoſitæ latera nuncupemus licet) proportionaliter ſecentur (id quod fiet à plano per hanc Superficiem trajecto ad planum, in quo ſita eſt B C, parallelo) divi-

ſionum

ſionum puncta lineam conſtituent, ſaltem ad lineam conſiſtent, ipſi BC ſimilem. Ducti enim quotlibet lateribus VB, VD, VE, VC, & ducto plano GKLH ad planum BDEC parallelo, ſint communes plani VBD cum planis BC, GH ſectiones rectæ BD, GH; hæ parallelæ erunt. Item communes plani VDE cum iiſdem planis BC, GH Sectiones DE, KL parallelæ erunt. Ergò anguli BDE, GKL ſunt æquales. Item ſe habet recta BD ad GK, ut DE ad KL, quia utraque hæc proportio æqualis eſt illi, quam habet VD ad VK (ſimilia quippe ſunt triangula VDB, VKG, & triangula VDE, VKL) permutandóque BD. DE :: GK. KL. ergò omnes ſubtenſæ in GH proportionales ſunt ſubtenſis omnibus in BC, eas nimirum in utraque linea ordinatim & deinceps accipiendo; & quæ ſibimet adjacent in una pariter inflectuntur cum iis, quæ ſibi adjacent in altera. Ergò ſecundum ſuperiùs inſinuata lineas BC, GH ſimiles eſſe conſtat. || Hinc etiam patet lineas curvas ſimiles BC, GH eandem ad ſe proportionem habere, quam Superficierum, in eadem qualibet recta ſita, latera VB, VG. Quum enim ſubtenſarum iiſdem angulis incluſarum (ut BD, GK, vel DE, KL) ſingulæ rationes æquales ſint rationi laterum VB, VG; etiam omnes antecedentes conjunctæ (hoc eſt tota BC) ad omnes conſequentes conjunctas (hoc eſt totam GH) ſe habebunt ut VB ad VG. Hinc etiam tali motu productarum ſuperficierum emergit hæc proprietas; quòd interceptæ ſcilicet à parallelis ad BC planis, à vertice deſumptæ, quibuſcunque lateribus iiſdem incluſæ partes ipſarum ſint inter ſe ſimiles; ut puta Superficies BVC, GVH; & BVD, GVK. (Quod ex generali ſimilitudinis doctrina poſthac explicanda luculentius apparere poterit; interim ex ſimilitudine linearum curvarum, & earum cum Superficiei lateribus analogia, penitúſque conſimili Superficierum generatione ſatìs eluceſcit; ſaltem ex triangulorum VBD, VGK; & VDE, VKL, & talium omnium ſimilitudine ſatìs conſtat; ſiquidem ex talibus infinitis triangulis utraque Superficies compoſita cenſeatur.) Unde ſimilium Superficierum proprietates iis convenient. Verùm quòd interceptas attinet à diverſis lateribus Superficies, eas inter ſe comparando, notandum eſt quòd baſibus ſuis, ſeu directricis lineæ reſpectivis partibus non ſemper proportionales ſunt; at ſaltem hoc tum evenit, cùm omnia dictæ Superficiei latera ſunt æqualia inter ſe, adeóque cùm linea directrix eſt peripheria circuli; quo caſu producta Superficies erit conica Superficies ſtrictè dicta, rectúmque quidem ad conum pertinens. Quod ſi directrix BC ſupponatur e. g. peripheria circularis, lateráque ſibimet inæqualia, ſi

16. XI. Elem.

10. XI. Elem.

12. V. Elem.

dividatur B C in partes æquales, & connectantur latera V D, V E non erunt Superficies B V D, D V E, E V C æquales inter ſe, ſed inſcrutabili plerumque ratione; juxta varias angulorum incluſorum, & laterum inæqualium differentias, inæquales; id quod hactenus illos divexavit & torſit, *qui dimetiendæ coni ſcaleni ſuperficiei incubuerunt.* || Ex his conſectatur quòd poſſit hujuſmodi circumlatio facta quadantenus concipi motu quoque tali lineæ rectæ genetricis, ità ut ejus ſingula quæque puncta parallelos lata ſimiles directrici lineæ lineas deſcribant, modo tamen concipiatur linea genetrix ubique proportionaliter aut contrahi, vel dilatari ſecundum omnes ſui partes. Quomodo nempe ſi recta V B ita ſenſim diduci concipiatur, ut punctum B totam lineam B C perambulet, etiam punctum G parallelo ad B C motu delata, lineam G H ipſi B C ſimilem deſcribet. Quinimò ſi conſimili pacto curva B C, directo quoad lineam rectam B V motu ſitúque ſemper ad ſeipſam parallelo concipiatur promoveri, ſic ut ejus ſingula quæque puncta lineas rectas deſcribant, ſecum omnes in punctum V concurrentes; hoc eſt ità ut ipſa per totum ſuum progreſſum juxta ſuas omnes partes analogicè contrahatur, ad verticem uſque V; producentur ex hujuſmodi motibus Superficies conicæ prorſus eædem cum jam proximè tractatis. Verùm hujuſmodi motus imaginarii ſunt, & quales rerum natura reſpuit. Explicandæ tamen hujuſmodi Superficierum naturæ deſervire poſſunt, & ſupponi ſaltem ut per *divinam potentiam effectibiles.* || Ad hæc, ſi *linea directrix* in motu proximè memorato ſupponatur undique clauſa, ſic ut figuram quamvis comprehendat, Superficies curva progenita cum hac figura, ceu baſe, corpus ſolidum includet pyramidale, vel conicum (ſtrictè vel laxè pro dictæ figuræ natura ſumptum) cujus generalia ſymptomata ſatis è dictis eluceſcunt. Nempe quòd à parallelis ad hujuſce ſolidi baſin planis abſcindentur ſimiles ad verticem Superficies, ſimiléſque baſes intercipientur, & ſimilia corpora Solida progignentur. Verbo dicam, quæ de *Conis* generatim *Euclides*, *Apollonius*, aliique tradiderunt, ea conicis hoc modo factis, ſervatâ debitâ analogia, convenient, & ſimili ferme modo demonſtrabuntur convenire. || Verùm uſitatiſſimus apud Mathematicos corpora progignendi modus eſt is qui peculiari nomine *Rotatio* dicitur, & fit ſuppoſito lineam quamvis, aut quamlibet Superficiem planam circa rectam lineam fixam, tanquam axem, revolvi. Quomodo ex motu Semiperipheriæ circularis circa diametrum producitur *Sphærica Superficies*, ex motu Semicirculi ipſius circa eundem *Sphæra* detornatur; ex motu lineæ rectæ circa lineam ipſi parallelam *Superficies Cylindrica*; ex motu parallelogrammi rectanguli circa latus unum ipſe *Cylindrus rectus*; ex motu cruris

unius

unius anguli rectilinei circa alterum *Conica Superficies*; ex rectanguli trianguli circa crus unum anguli recti *conus* ipſe deformatur; eoque pacto *cùm integræ cum ſuis Curvis Superficiebus Solidæ magnitudines innumeræ, tum ipſarum portiones, fruſta, tubi, annuli procreantur.* Cujuſmodi motûs hæc præcipua proprietas eſt, quòd ſingula quæque magnitudinis circumductæ puncta peripherias obeant circulares (integras quidem illas, modò perfecta ſit revolutio, ſeu mobile denuo primum in ſitum reſtituatur, at ſimiles utcunque ſibi mutuo, quæ ſimul deſcribuntur) quarum omnia Centra ſunt in dicto axe, radii verò ſunt rectæ ab ipſis punctis ad axem perpendiculares. Vel; quod omnes in mobili ſitæ rectæ lineæ axi perpendiculares efficiunt circulos (ſi revolutio ponatur integrè peracta) aut circulares ſimiles ſectores, illos intelligo qui ſimul eodem tempore delineantur. Ut ſi v. g. linea quævis circa axem V K rotetur, eo procreabitur motu curva quædam Superficies, circularibus quaſi peripheriis conſtans (*Atomiſtarum* enim phraſin facilitatis, perſpicuitatis, brevitatis, addere licet & veriſimilitudinis causâ non illibenter uſurpo) circularibus, inquam, peripheriis A Y, B Y, C Y, D Y per puncta A, B, C, D reliquáque quæ ſunt in V D cuncta decircinatis; quarum radii ſunt rectæ A Z, B Z, C Z, D Z axi perpendiculares, & Centra Z in axe. Quòd ſi revolutio tantum eouſque continuatur, donec V A D ſit in ſitu V α δ, conſtabit *effecta Superficies* ex arcubus A α, B ζ, C γ, D δ, ſimilibus inter ſe eodem modo ſi planum V D Z circa axem V K revolvatur, poſito quòd integra peragatur converſio, producetur Solidum quaſi conſtans innumeris circulis parallelis A Y, B Y, C Y, D Y; quorum (ut priùs) radii A Z, B Z, C Z, D Z, centra Z; poſitóque quod circulatio deſiſtit in ſitu δ υ K, conſtituetur Solidum è ſectoribus A Z α, B Z ζ, C Z γ, & reliquis inter ſe ſimilibus. Cæterúm prætermittenda non eſt animadverſio quædam perquam utilis, & neceſſaria circa *modum Superficierum, & Solidorum hoc modo reſultantium dimenſiones inveſtigandi juxta methodum indiviſibilium, omnium expeditiſſimam, & modò ritè adhibeatur haud minùs certam & infallibilem.* Objicit huic methodo non ſemel, in pererudito ſuo de *Solidis cylindricis ac annularibus libello, doctiſſimus A. Tacquetus*, eóque ſe putat illam deſtruere, quòd per eam inventæ *conorum, & ſpherarum ſuperficies* (quantitates horum intelligo) veræ per *Archimedem* repertæ ac traditæ dimenſioni non reſpondent. Sit exemplo *rectus conus* D V Y, cujus axis V K; per cujus omnia puncta tranſire concipiantur axi perpendiculares rectæ Z A, Z B, Z C, Z D, &c. è quibus nempe juxta *methodum atomicam* componitur

Fig. 9.

Fig. 10, 11, 12.

K

ponitur ipſum *triangulum rectangulum* V K D ; & è circulis ad quas ceu radios deſcriptis ipſe *conus* conflatur. Ergò, diſputat, ex horum circulorum peripheriis *Superficies conica* componetur ; quod tamen veritati comperitur adverſari ; methodúſque proinde fallax eſt. Repono, malè calculum hoc pacto iniri ; & in peripheriarum è quibus *Superficies* conſtant computatione diverſam inſtituendam eſſe rationem ab ea, quâ computantur lineæ quibus *planæ ſuperficies* conſtant, aut plana, è quibus corpora formantur. Nempe peripheriarum Superficiem curvam conſtituentium è revolutione prognatam lineæ V D cenſeri debet è multitudine punctorum, quæ ſunt in ipſa linea genetrice V D ; quippe cùm per ea ſingula puncta tales peripheriæ tranſeant, nec plures tranſire queant ; quicunque ſit axis, ſeu longiùs diſtans, ſeu propiùs adjacens ; axis enim ſolummodò, pro longiore vel propiore diſtantia poſitioneque varia, dictarum peripheriarum magnitudinem determinat. Verùm multitudo linearum ex quibus planum D V K ſupponitur conſtare, planorúmque quibus Solidum D V Y conſtat, è numero taxanda eſt punctorum in axe V K ; nec enim plures intra terminos V K parallelæ, ipſi V K perpendiculares, rectæ, vel plura talia parallela plana duci poſſunt, quam horum punctorum multitudini æquinumera. Quod obſervando *diſcrimen* (ſedulò perpendendum) omnem devitabimus errorem, & *curvarum hujuſmodi rotatu genitarum Superficierum facillimè, reor, omnium quos rei natura ſubminiſtrat modò perquiremus.* Illum commonſtrabo. Pro reperienda v. g. dimenſione *curvæ ſuperficiei* lineæ V D circa axem V K revolutione, concipiatur ipſa V D in directum extendi, ità ſcilicet ut ei exæquetur recta V D ; & ad ejus omnia puncta rectæ concipiantur applicari ipſi V D perpendiculares, & peripheriis circularibus, è quibus Superficies curva conflatur, ordine pares ; ſingulæ ſingulis, puta A X ipſi A Y, & C X ipſi C Y, ac ità continuo. Erit ex his parallelis rectis conſtitutum planum V D X æquale *dictæ curvæ ſuperficiei* ; hujúſque partes illius partibus reſpectivis. Sin loco *peripheriarum* applicentur ipſarum reſpectivi radii A Z, B Z, C Z, & reliqui ; ſpatium ex his rectis conſtitutum (quæ ſanè proportionali cum alteris ſerie procedunt) ſe habebit ad *curvam Superficiem, ut circuli cujuſvis radius ad ejus circumferentiam.* Unde ſiquâ ratione deprehendi poſſit *Summa radiorum peromnia lineæ genetricis puncta tranſeuntium* (hoc eſt ſi *ſpatii V D Z dimenſionem* reperire contigerit) eo ſtatim innoteſcet *curvæ Superficiei dimenſio.* In exemplum, facilitatis ergò, proponatur *conica Superficies* D V Y, è rotatu procreata rectæ V D, circa axem V K. Ad rectam V D applicentur

Fig. 10, 11, 12.

plicentur rectæ AZ, BZ, CZ, DZ ad ipſam VD perpendiculares, & æquales ſingulæ ſingulis in cono circulorum radiis per eaſdem literas deſignatis; fiet autem in hoc caſu *Spatium* VDZ triangulum, quia rectæ AZ, BZ, CZ æqualiter à ſe diſtantes æqualiter increſcunt, id quod trianguli applicatis omninò proprium eſt. Hujus autem trianguli, ex datis altitudine VD & baſe DZ, dimenſio in promptu eſt. Quod ſi fiat *ut circuli radius: Ad circumferentiam ipſius, ità triangulum VDZ ad quartum*, erit hoc quartum æquale *Superficiei conicæ propoſitæ*. Eodem planè modo perquam facilè *Sphæræ, Sphæricarúmque portionum Superficies* (nec, datis & præcognitis iis quæ requiruntur, alias quaſlibet hoc modo natas) inveſtigare licet. At mihi propoſitum eſt generalioribus tantùm inhærere. || Hanc autem magnitudinum geneſin æmulatur, & affinitate quâdam contingit iſte modus, quum circa rectam lineam, (aut quidem circa quamvis aliam) ſimiles innumeræ lineæ, vel figuræ parallelo juxta ſe ſitu diſpoſitæ taliter conſtituuntur, ut ſingulæ centrum ſuum habeant in dicta linea, quæ proinde tanquam axis rationem ſubit, ac talis denominatur. Quomodo, e.c, in *cylindris obliquis*, inque *conis Scalenis* circuli circa lineam quandam rectam conſiſtunt; quæ propterea dicitur ipſorum *axis*, quoniam in ea circulorum parallelorum *centra* exiſtunt. Sed cùm motus ità diſtortos natura non capiat (ſaltem juxta modum operandi ſimplicem quem nunc ſupponimus) & quia poſſunt hujuſmodi magnitudines ut modis aliis genitæ faciliùs concipi, de iis abſtinebimus. Neque non de magnitudinum per motus ſimplices effectione ſufficiet hactenus diſſeruiſſe. ||

LECT.

LECT. III.

QUomodo per *motus ſimplices progreſſivum*, & *converſivum effectæ concipiantur magnitudines*, & *qualia generationes iſtas conſequuntur ſymptomata* (nonnulla ſaltem præcipua) *conniſi ſumus exponere ad compoſitos nunc*, & *concurrentes*, *eidem propoſito ſervientes*, *motus accingimur*; quorum in effectis diſcernendis velocitates, ſecundum quas ſimplices peraguntur motus, omnino, vel cum primis conſiderandæ ſunt; quarum in generatione per motus ſimplices nulla prorſus habetur ratio. Per eundem enim motum ſimplicem ſeu velocior is ſit, ſeu tardior eadem magnitudo, quamvis non eodem temporis intervallo, producitur; idem nempe *circulus* ex ejuſdem rectæ circa punctum in ea fixum, *eadem Sphæra* ex Semicirculi circa *diametrum* rotatu; quamvis ut hæc fiant eo magis aut minus expectandum ſit, quo ſegnior aut citatior ſupponitur ea progenerans motus. Verùm in generatione per motus compoſitos iiſdem manentibus lationis modis, prout unius aut plurium variatur velocitas, nedum ſpecie, ſed etiam quantitate diverſæ magnitudines emergere ſolent, poſitione ſaltem perpetuò differentes. Ut ſi recta A B per rectam A C parallelo deferatur æquabili motu; & ſimul punctum M in A B deſcendat uniformiter; vel ſimul recta A C parallelo quoque uniformi motu deſcendens ipſam A B promotam interſecet in M; ex ejuſmodi motuum compoſitione vel concurſu producetur recta linea A M. Quòd ſi eodem, etiam quoad velocitatem manente motu rectæ A B, immutetur in velocitate motus uniformis puncti M, vel rectæ A C, ità quidem punctum M jam eodem tempore pervenerit ad μ, vel A C ſecet ipſam A B in μ, deſcribetur hoc motu alia recta A μ à priore A M poſitione diverſa. Sin verò, manente rurſus eodem motu rectæ A B, pro motu puncti M, vel rectæ A C uniformi ſubſtituatur motus, quem vocant, æqualiter acceleratus, ex ejuſmodi compoſitione, vel concurſu fiet linea

Fig. 13.

parabolica

parabolica A M X vel etiam aliter posita A μ Y (prout hic motus accelleratus gradu ponitur alius ac alius.) Quod si quâpiam aliâ ratione crescere concipiatur, aut minui dicti puncti vel lineæ velocitas alia progignetur inde, pro ratione *hypotheseos*, diversa species magnitudinis. In his conspicitur exemplis quod eodem subinde recidant *compositio motuum et concursus*; quod exinde quidem contingit, quia rectæ cujuspiam parallelo motu latæ singula puncta rectas describunt sibi parallelas; unde fit ut perinde sit an punctum ejus aliquod in ipsa fixum deferatur cum ea, vel solutum per lineam ejus directioni parallelam; ut nempe utrum punctum M in AC fixum cum ea deferatur, an liberè decurrat per rectam AB eâdem velocitate. At sæpe non ita facile per horum utrumlibet modum *magnitudinum generatio* declaretur, sit enim recta AB æquabiliter rotata (hoc est, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et simultaneè punctum M ab A in ipsa recta A B continuo motu feratur, etiam uniformi; ex ista *motuum* compositione linea quædam producetur, *helix* scilicet *Archimedea* (nam talia consultò proponimus *exempla, quò celebrium apud Mathematicos magnitudinum obiter naturam insinuem*, et instillem minus ad hæc exercitatis; id transcurrens moneo) cujus generatio per nullos, opinor, mobilium concursus, liquidò commodèque satis explicetur; ita nimirum ut motuum istorum, vel eorum quantitatem determinantium angulorum, seu linearum, ratio, quantitasve dignoscantur. Fig. 14. Generari quidem poterit è concursu paralleli motûs rectæ AC; vel circularis motûs rectæ BA circa Centrum quodvis B, concursu cum prædicto regulari motu circa Centrum A; at quæ sit tum futura rectarum AM, Aμ; vel angulorum ABM, ABμ quantitas difficilè constabit. E contrà, si recta BA circa Centrum B motu rotetur uniformi; et simul recta AC per AB parallelas, & uniformiter deferatur, rectarum BA, AC ita latarum intersectio continua lineam quandam efficiet (illam nempe, quæ quadratrix dici solet) cujus generatio non ità clarè per strictè dictam motuum compositionem expediatur, aut explicetur. Fig. 15. Generari quidem potest per motum rectum alicujus puncti M in AB delatâ parallelos ad primò positam AB; vel ex puncto tali in AC parallelo quoque delatâ; vel per motum puncti in AB, circa B; vel circa A rotatâ, rectè ab A versus B, vel à B versus A decurrentis; sed hujusmodi suppositâ quâpiam motuum compositione, quænam sit rectarum AM, aut BM; vel angulorum BAM aut ABM aut AMB, vel aliarum quarumvis magnitudinum hosce motus determinantium quantitas, aut inter se relatio, difficulter innotescat. Qua præcipuè de causa

motuum compoſitionem ab ipſorum concurſu ſecerno; quia nempe magnitudinum generatio nunc uno, nunc alio modò faciliùs explicatur. Verum ad illos diſtinctius exponendos accedo. De compoſitione primum. Cùm autem motus duobus modis compoſitus intelligi poſſit; vel ut è pluribus motibus aggregatus, vel ut de pluribus participans; de poſteriore nos diſſertamus; quem fortè non meliùs quam prænobilis Philoſophi verbis, & exemplis enucleatum dem.

Carteſ. princ. II. 31, 32. "Etſi autem (inquit ille) unumquodque corpus habeat tantùm "unum motum ſibi proprium, quoniam ab unis tantùm corpori- "bus ſibi contiguis, et quieſcentibus recedere intelligitur, parti- "cipare tamen etiam poteſt et de aliis innumeris; ſi nempe ſit "pars aliorum corporum alios motus habentium. Ut ſi quis am- "bulans in navi *horologium in* pera geſtet, ejus horologii rotu- "læ unico tantùm motu ſibi proprio movebuntur; ſed participa- "bunt etiam ex alio, quatenus adjunctæ homini ambulanti unam "cum illo materiæ partem component; et ex alio quatenus erunt "adjunctæ navigio in mari fluctuanti; et ex alio quatenus ad- "junctæ ipſi mari; et denique alio, quatenus adjunctæ ipſi terræ, "ſiquidem tota terra moveatur. Omnesque hi motus revera e- "runt in rotulis iſtis, ſed quia non facilè tam multi ſimul intel- "ligi, nec etiam omnes agnoſci poſſunt, ſufficiet unicum illum, "qui proprius eſt cujusque corporis in ipſo conſiderare. Ac præ- "terea ille unicus cujuſque corporis motus, qui ei proprius eſt, "inſtar plurium poteſt conſiderari; ut cùm in rotis curruum du- "os diverſos diſtinguimus, unum ſcilicet circa ipſarum axem, et "alium rectum ſecundum longitudinem viæ per quam feruntur. "Sed quòd ideò tales motus non ſint revera diſtincti patet ex eo, "quòd unumquodque punctum corporis quod movetur unam tan- "tum aliquam lineam deſcribat. Nec refert quòd iſta linea ſæpe ſit "valde contorta, et ideò à pluribus diverſis motibus genita vi- "deatur, quia poſſumus imaginari eodem modo quamcunque li- "neam etiam rectam, quæ omnium ſimpliciſſima eſt, ex infini- "tis diverſis motibus ortam eſſe. Ut ſi linea A B feratur verſus

Fig. 16. "C D, et eodem tempore punctum A feratur verſus B, linea "recta A D, quam hoc punctum A deſcribet, non minus pende- "bit à duobus motibus rectis, ab A in B et ab A B in C D, quàm "linea curva, quæ à quovis rotæ puncto deſcribitur, pendet à "motu recto et circulari. Ac proinde quamvis ſæpe utile ſit u- "num motum in plures partes hoc pacto diſtinguere ad facilio- "rem ejus perceptionem; abſolutè tamen loquendo unus tantùm

in

"in unoquoque corpore eſt numerandus. Ita *Carteſius*. Nempe cùm magnitudo quæpiam exinde quod aliis modo quopiam adnectitur, illorum motus ita particeps eſt, ut ab eo quoad ſitum ſuum aliquatenus determinetur, iſte motus hujus compoſitionem quaſi pars ingreditur, ab exemplis poſthac adjungendis res luculentius apparebit. Motus autem hoc modo componi poſſunt *Progreſſivi* cum *Progreſſivis*, *Progreſſivi* cum *Circumlatitiis*, *Circumlatitii* cum *Circumlatitiis*; componi poſſunt, inquam, et decomponi modis innumeris; quorum omnium cùm inire cenſum impoſſibile ſit, illoſque qui à regularitate deflectunt intelligere difficile ſit, exponere difficiliùs; nos præcipuos ſaltem aliquos, in uſu magis poſitos, et explicatu faciliores attingemus. Quales imprimis ſunt ii qui è motibus directis et parallelis; è directis et rotatitiis, è pluribus rotatitiis componuntur; præſertim illi quos qui conſtituunt ſimplices motus omnes vel nonnulli ſunt uniformes. Nam *uniformitatem nedum Reſpublica requirit, ac exigit Eccleſia, ſed artes etiam atque ſcientiæ vehementer affectant.* Recti motus (quibus parallelos à recta linea directos motus adnumero) primum ſibi non immerito locum aſſerunt, ut ſimplicitate præcellentes, naturæ convenientes et chari, præ cæteris utiles ac uſitati. Nec ulla ſanè magnitudinis eſt ſpecies (nulla linea, nulla ſuperficies, nullum corpus) cujus generatio non è rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno plano conſtituta linea procreari poteſt è motu parallelo rectæ lineæ, et puncti in ea; omnis ſuperficies è motu parallelo plani, et lineæ in eo (lineæ ſcilicet alicujus è rectis modo jam inſinuato motibus progenitæ) conſequenter et linea quævis etiam in curva ſuperficie deſignata rectis motibus effici poteſt. Corpus autem ſolidum eodem modo genitum intelligatur, quatenus è ſuperficierum genitura reſultat, et quatenus ab ipſis ità genitis terminatur, ac circumſcribitur Sed quia *ſuperficierum plerarumque curvarum*, quales hactenus *Matheſis* excogitavit, & linearum in iis non in uno plano jacentium, generatio per alios modos commodiùs explicetur, neque mihi quicquam ſuccurrit animadverſione dignum quod de iis dicam, de linearum ſaltem in uno plano exiſtentium, per rectos et parallelos motus generatione diſpiciam. Et quidem has quod attinet, earum nulla eſt quæ non ex motu parallelo lineæ rectæ, punctique per eam delati producatur; verum hi motus eo contemperari modo debent, quem ſpecialis lineæ producendæ natura poſcit; nec refert qualem, velocitatis reſpectu, motum uni tribuas, ad hujus modo

diversitatem alterius diversitas ritè consequatur accommodeturque. Ut e. g. si recta Z A semper per rectam A Y sibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difformi (crescente, vel decrescente vel alternante secundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilem) et in ea punctum aliquod M deferatur, ità tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per singulas quasque temporis partes easdem proportionentur, producetur utique linea recta. Nempe si fuerit semper A B. A C :: B M. C μ. vel A B, M X :: A M, X μ (positâ scilicet M X ad A C parallelâ) liquet puncta A, M μ in una recta versari. Est enim rectæ lineæ proprietas in Elemento VI. demonstrata, quòd ad eam parallelos applicatæ rectæ lineæ suis ad designatum in ea punctum distantiis proportionales in rectam lineam terminantur. Quod si motus hi sic inter se contemperentur, ut assumptâ quâdam lineâ D habeat rectangulum ex differentia lineæ D, & ipsius B M (à puncto mobili decursæ in recta A Z) & ipsa B M ad quadratum ex A B (eodem tempore decursa à linea A Z) rationem semper eandem progignetur *ellipsis aut circulus*; circulus quidem si ratio proposita fuerit æqualitas, & angulus Z A Y rectus, *ellipsis* si secus; & in his erit D una *diametrorum*, situm habens in linea A Z primò positâ, à vertice A porrecta versus partes Z. Sin ità se habeant, ut rectangulum ex summa linearum D, & B M & ipsa B M semper eandem cum quadrato ex A B proportionem servet, eo composito motu procreabitur *hyperbole*; quadrata quidem illa (vel æquilatera rectangula) si ratio designata fuerit æqualitatis, & angulus Z A Y rectus; sin aliter, alterius, pro rationis assignatæ quantitate, speciei; cujus *transversa diameter* æquabitur ipsi D, situm habens in Z A primò posita à vertice A protensa versus partes aversas ab Z; & parameter ex ratione data determinatur. Quòd si perpetuò rectangulum ex ipsa D, & decursa B M ad quadratum ex A B eandem perpetuò rationem obtinet, constabit effici *lineam parabolicam*, cujus *parameter* ex rectæ D, datæque rationis propositæ quantitate facilè definietur. Et in horum primo quidem casu si motus transversus per A Y ponatur uniformis, etiam motus descendens per A Z uniformis erit; in secundo & tertio si motus per A Y sit uniformis, erit motus descendens perpetuò crescens; eodemque posito quoad ultimum casum, in quo parabola fit; punctum M continuo velocitate crescet æqualiter. Nec absimili modo quævis alia linea tali motûs compositione producta concipi potest. Sed ut eò quo tendimus aliquando perveniamus; agedum videamus ecquid in *rem Mathematicam* utilitatis ex hujusmodi

Fig. 17.

modi ſuppoſita linearum generatione poterimus indipiſci. Simplicitatis autem & perſpicuitatis cauſâ ſupponamus alterum ex his motibus, rectæ nimirum parallelíſmum ſervantis, eſſe ſemper uniformem, & quænam ex alterius quoad velocitatem generalibus differentiis generales emergant linearum productarum affectiones adnitamur elicere. Adnitamur inquam, at proxima lectione.

LECT. IV.

Propoſitum eſt nobis è compoſitione motuum (qualem proximè deſcripſimus) emergentes linearum affectiones indagare ac exponere. Quorſum imprimis methodi cauſâ repeto ſi recta AZ per rectam AY ſibi perpetuò parallela feratur uniformiter, et in ea quoque punctum M uniformiter deportetur, quâvis velocitate, linea recta proveniet. Sumantur enim duæ quævis lineæ mobilis AZ poſitiones, ad B ſcilicet & C; & quia motus per AY ponitur uniformis, erunt decurſa ſpatia AB, AC ad ſe, ut *Tempora*; ſed et ob motum uniformem puncti M etiam rectæ BM, CM ſe habebunt ut eadem tempora; eſt igitur AB. AC :: BM. CM. Unde liquet puncta A, M, M in una recta linea exiſtere. Parique ratione conſtat idem de punctis omnibuſcunque, quibus punctum M per totum ſuum curſum inſiſtit, aut coincidit. Supponatur ſecundò punctum M motu continuo increſcente deferri (juxta quamlibet velocitatis rationem, regulari modo quocunque nil intereſt, an irregulari) aio *ſuppoſitionem hanc conſectari progenitarum linearum quas apponemus proprietates generales* (quales uni tali linearum generi convenientes certè præſtat ex unimoda communi generatione ſimul univerſas elicere, quàm de ſingulis, ut paſſim fieri ſolet, ſingulas ſeparatim oſtendere.) Notetur interea, quòd brevitatis cauſâ motum parallelum uniformem rectæ AZ per AY appellabo ſubinde *motum tranſverſum*; puncti verò moventis ab A in linea AZ motum vocitabo *deſcenſum*, aut *motum deſcendentem*, habito ſcilicet ad figuram exhibitam reſpectu. Item quòd, ob motûs per AY et ei parallelas uniformitatem, poſſit ea cum ipſius partibus motûs tempus, et ejus partes repræſentare. Jam ad dictas proprietates expendendas accedo. I. Hoc

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 19. I. Hoc modo (per motum nempe tranſverſum uniformem, & deſcenſivum continuò creſcentem) progenita linea per omnes ſui partes curva evadet. || Accipiantur enim in ipſa tria quælibet puncta M, N, O; per quæ tranſeant BZ, CZ, DZ ad AZ parallelæ, & per puncta M, N ducatur recta MNK. Et quia recta MN gignitur è motu compoſito tranſverſo per BC (vel huic parallelam MG) & deſcendente per AZ, uniformi utroque; tranſverſus autem per MG eſt prorſus idem cum tranſverſo, quo linea propoſita MNO deſcribitur; patet velocitatem deſcendentis motûs uniformis rectam MN gignentis minorem eſſe velocitate, quam motus itidem deſcendens, lineam MNO deſcribens, habet in N (etenim niſi motus hic velocior jam ſit illo, cùm continuò creſcere ponatur, in toto tempore deſcenſus per GN illo tardior fuiſſet, adeóque nunquam eodem tempore ſpatium æquale tranſegiſſet, nec una cum eo pertigiſſet ad punctum N) ergò motus hic inæqualis & increſcens per tempus motûs uniformis CD continuatus (quo nempe gignitur linea NO) majus ſpatium emetitur, quàm uniformis motus deſcendens, quo MN. ad K protractus deſcribitur, eodem tempore CD; (liquet enim eodem tempore à majore vi creſcente majus ſpatium peragi, quam à minore neutiquam creſcente) quare linea HO major eſt quam HK; adeóque tria puncta M, N, O non exiſtunt in eadem recta linea; quod cùm tribus quibuſvis lineæ MNO punctis conveniat, abunde patet eam eſſe nullibi rectam, ſed per omnes ſui partes incurvatam, & inflexam.

II. Hinc emergit *Corollarium*; velocitas motûs uniformis deſcendentis, quo curvæ MNO ſubtenſa quævis (ut MN) deſcribitur, exiſtente ſcilicet communi tranſverſo motu uniformi quo ipſa, ejúſque arcus fiunt, minor eſt velocitate, quàm motus deſcenſivus increſcens habet ad communem utriuſque terminum N.

III. Hujuſce curvæ *ſubtenſa* quælibet (ut MO) intra *ſuum arcum* (verſus partes AZ) tota cadit, & producta tota cadit extra lineam MNO.

Elem. III. 2. *Apoll.* I. *Seren.* I. 8. Nam ſi ſumatur in arcu MO punctum quodvis N, & connectantur rectæ MN, NO liquet totam MO intra rectas MN, NO jacere, & proinde intra curvam MNO. Tota verò, ſi producatur, extra lineam MNO cadit, quia nuſquam alibi ei occurrit, uti mox oſtenſum.||

Hoc accidens de circulo ſpeciatim demonſtrat *Euclides*, *de ſectionibus conicis Apollonius*; *de cylindricis Serenus*. IV. Patet

IV. Patet curvam propoſitam eſſe convexam, aut concavam ad eaſdem partes (convexam verſus partes ſuperiores vel exteriores AY, concavam introrſum, aut deorſum verſus AZZ) nam hoc ipſum, fore convexum aut concavum ad eaſdem partes, nil omnino deſignat aliud, quàm a nulla recta linea præterquam duobus punctis ſecari; nec alio recidit, quam initio libri de ſphæra & cylindro tradit *Archimedes*, lineæ ad eaſdem partes cavæ definitio. Perſpicuum eſt v. g. ut linea MN duobus in punctis M, N curvam MNO ſecans ei rurſus occurrat, ut puta in K, debere curvam MNO reflecti, verſuſque partes AY recurvari; id quod modò demonſtratum eſt non poſſe contingere. Quapropter ipſa linea verſus eaſdem partes convexa eſt, ſeu concava.

V. Apertiſſimè conſtat lineas quaſvis rectas (ut BZ, CZ) genetrici AZ parallelas propoſitam curvam ſecare (modò contineantur intra terminos motûs per AY; quia curva per harum quamvis indefinitè promotam deſcripta cenſetur) addo quod harum quælibet curvam in uno tantùm puncto ſecat. || Id patet, quia recta genetrix AZ per unicum duntaxat inſtans temporis durat in ſitu quovis uno, ſeu BZ; ſimúlque pertingit ipſam BZ, ac deſerit; prætérque punctum unum M in BMZ reliqua cuncta lineæ curvæ puncta ſunt in parallelis ad BZ. Ergò liquidum eſt ipſam BZ in uno tantum puncto curvam ſecare. || Hoc ipſum de parabola, & hiperbola ſpeciatim oſtendit *Apollonius*; de ſectionibus conoideon *Archimedes*. *Apoll.* l. 2. *Arch. de Conoid. & Sph.* 16.

VI. Non diſſimili modo patet ad AY parallelam quamvis, (qualis PG) unico puncto propoſitam curvam attingere. || Quòd ſemel occurret (modò contineatur intra limites deſcenſûs per AZ) patet, quia punctum mobile continuò deſcendens, indefinito progreſſu, eam indefinitè protenſam aliquando trajiciet; nec in eo tamen præterquam ad unum temporis momentum perdurat. || Videatur hoc de ſectionibus conicis oſtendens *Apollonius*. I. 19.

VII. Patet omnes curvæ ſubtenſas rectas cum AZ & ei parallelis, ſi producantur, concurrere.

Quòd enim ſubtenſa quævis, ut MN, uni parallelarum alicui, ut BR, occurrit, ibi ſcilicet ubi ipſa curvam ſecat, exinde manifeſtiſſimum eſt, quòd tota curva per parallelum dictæ rectæ motum deſcribitur. Ergò, cùm uni occurrat, omnibus occurret; quæ enim uni parallelarum

larum æquidiſtat recta, pariter omnibus æquidiſtat, ut in elemento primo demonſtratur.

I. 22. Operæ pretium exiſtimavit *Apollonius* hoc de *parabola*, & *hyperbola* ſpeciatim demonſtrare.

VIII. Simili modo patet rectas quaſcunque curvas tangentes una tantùm excipitur, ad extremum lineæ recurrentis. Vid. 18. hujus. Iiſdem parallelis occurrere. || Etiam hoc, quoad *ſectiones conicas*, uno vel altero *Theoremate* demonſtravit *Apollonius*.

I. 24, 25.

IX. Quinimò rectæ quævis ipſam AZ ſecantes (infra punctum A, ſupráque limitem, ſiquis erit, motûs deſcenſivi) curvam ſecabunt.

Cùm enim omnes ipſi AZ parallelas ſecent etiam infinitè productæ curvam ſecent oportet. *Hujuſmodi Symptomatis demonſtrationi in ſectionibus conicis* laborioſam operam impendit *Apollonius*.

I. 27, 28.

X. Porrò liquet applicatas ad rectam AY, ipſi AZ parallelas (quas nempe propoſitæ curvæ ſinus verſos appellare fas erit minorem inter ſe rationem habere (minores cum majoribus comparando, ſeu minores antecedentium loco ponendo) quàm habent reſpectivæ ipſius AY partes, iiſdem temporibus decurſæ (quas & curvæ propoſitæ ſinus rectos appellare nil dubitem.) Nempe BM ad CN minorem rationem habet, quàm AB ad AC, vel BM ad CF; quia CN ⊏ CF. || Hoc de circulis, & aliis curvis ſpeciatim reperiatur paſſim oſtenſum.

Ad ſequentia notandum, quod ſi recta tranſverſim & parallelos mota retrogradè (à D puta verſus A per DA) moveri concipiatur, ab aliquo curvæ propoſitæ puncto, velut O, incipiens; eâdemque ſemper ratione dictum punctum ab O aſcendens quoad velocitatem decreſcat, quâ ad ipſum O deſcendens increverat, eadem curva producetur. Quidni? Cùm idem motus ſit, inversè tantum conſideratus.

XI. Supponatur rectam lineam TMS propoſitam curvam in puncto M tangere (ſic ut eam nempe non ſecet) occurrátque tangens hæc rectæ AZ in T, ducatúrque per M recta PMG ad AY parallela; dico velocitatem puncti deſcendentis, eóque motu curvam deſcribentis, quam habet ad contactum M, æquari velocitati, quâ recta TP deſcribetur uniformiter eodem tempore, quo recta AZ fertur

per

per AC vel PM. (vel, quòd eodem recidit, dico quòd velocitas puncti descendentis in M ad velocitatem quâ fertur recta AZ se habet, ut recta TP ad PM.) Sumatur enim ubivis in tangente punctum aliquod K, & per ipsum ducatur recta KG, curvæ occurrens in O, parallelis autem AY, & PG in D, & G. Et quia tangens TM duplici concipiatur uniformi motu descripta, altero rectæ TZ per AC vel PM parallelas delatæ, altero puncti descendentis à T per TZ; & sit horum motuum alter per AC, vel PM communis vel idem cum illo quo curva describitur; cùm TZ est in situ KG, erit AZ in eodem; ergò cùm punctum à T descendens fuerit in K, erit punctum ab A descendens in curvæ cum KG intersectione O (nec enim, ut anteà deductum est, alibi recta KG curvam secat) est autem punctum O infra K quia tangens extra curvam tota versatur. Jam si punctum K ponatur supra contactum versus T, quoniam tum OG minor est quàm KG, liquet velocitatem puncti descendentis, quo curva describitur, in curvæ puncto O minorem esse velocitate motûs uniformis descendentis, quâ tangens efficitur; quoniam illa semper increscens eodem tempore (per GM repræsentato) minus spatium transigit, quàm hæc minimè crescens; ast eadem continuo perseverans; illa scilicet rectam OG hæc rectam KG conficit. Contra vero si punctum K infra contactum ad partes S existat, quoniam OG tum major est quàm KG, patet velocitatem puncti descendentis, quo curva fit, in puncto O majorem esse velocitate motûs uniformis itidem descendentis, quo tangens efficitur; quia motus iste, continuò decrescens eodem per GM tempore, majus peragit spatium OG, quàm hic minimè decrescens, at in eodem tenore persistens, conficit, ipsum nempe spatium KG. Ergò cùm velocitas curvam describentis puncti quovis in curvæ puncto supra contactum versus A minor sit velocitate motûs per TP; quovis autem in puncto infra contactum eâdem major; liquet in ipso contactu M ei penitus exæquari. Q.E.D. Fig. 20.

XII Hujus conversa, consimili discursu, rem brevius exponendo, demonstretur. Nempe, si velocitas puncti descendentis ab A in aliquo curvæ puncto M æquetur velocitati, quâ punctum T uniformiter latum, rectam TP describeret tempore PM vel AC (vel sit velocitas motûs descendentis ad M ad velocitatem motûs transversi, ut TP ad PM) recta TMS curvam AMO tanget ad M.

Nam ſumpto quovis in recta TS puncto K, & ductâ KG ad AZ parallelâ; quoniam verſus partes AT velocitas aſcendentis puncti, curvam efficientis, ſemper decreſcit ab M ad O, illi verò ex hypotheſi par velocitas puncti rectam MT gignentis haud decreſcit ab M ad K, ſitque tempus MG commune, erit ſpatium GO minus quàm GK; unde punctum K erit extra curvam. Item, quia verſus alteras partes, velocitas deſcendentis, quo curva fit, increſcit ſemper ab M verſus O; æqualis autem ei velocitas, quâ recta MS fit, haud creſcit ab M ad K; idémque ſit rurſus tempus MG, liquet rectam GO excedere rectam GK; & idcirco punctum K ſupra curvam exiſtere. Quare manifeſtum eſt omnia dictæ rectæ puncta extra curvam exiſtere; & eam proinde curvam contingere: Q.E.D.

XIII. Ex hiſce ſtatim *conſectatur*, *hujuſmodi curvas ad unum punctum ab una tantùm recta contingi.*

Nam tangere ponatur recta MT curvam AMO ad M; & ſi fieri poteſt altera MX etiam tangat. Ergò eodem tempore, eâdem velocitate (illâ ſcilicet, quæ puncti curvam deſcribentis ad contactum M acquiſitæ velocitati æquatur) deſcribetur utraque recta XP, TM; quare XP, TP æquales erunt, totum & pars: Q.E.A. Ergò non tanget altera præter poſitam MT. || *Hanc ſpeciatim de circulo demonſtravit Euclides; de Sectionibus Conicis Apollonius*, de lineis aliis alii. Exhinc *Lucrum* emergit haud aſpernandum, quòd eâdem operâ *propoſitiones de tangentibus inverſæ demonſtrantur.* Nempe ſi determinetur angulus PMT (vel alter quiſpiam quem recta poſitione data cum tangente facit ad punctum curvæ deſignatum) aut ſi determinetur quantitas rectæ PT (vel ſimilis cujuſpiam alterius à puncto in data poſitione recta deſignato per tangentem interceptæ) eo tangens determinabitur. Et permutatim, ſi tangens ſitu determinetur, angulorum atque linearum ejuſmodi quantitas indè dignoſcetur. Adeóque parcetur operæ, qualem inſumpſerunt plerique tales propoſitiones inverſas demonſtrandi. Quod & eo magis obſervatu dignum eſt, quia ſæpe talium inverſarum propoſitionum una quàm altera longè promptiùs invenitur, atque facilius demonſtratur. Cujus obſervationis, niſi longiùs evagari nollem, in promptu forent *Specimina.*

Eucl. III. 16, 17.
Apoll. I. 32, 33, 34, 35, 36.

XIV. E dictis infertur puncti deſcendentis velocitates in duobus quibuſvis deſignatis curvæ punctis ad ſe proportionem habere reciprocè com-

compoſitam è rationibus applicatarum ab iſtis punctis ad rectam AZ (ipſi ſcilicet AY parallelarum) & interceptarum à tangentibus ad iſta puncta ac dictis applicatis (vel, rationem velocitatum æquari rationi applicatarum ex interceptarum ratione ſubductæ.)

Nempe ſi duæ rectæ MT, NX curvam tangent ad puncta M, N; protractæ ZA occurrentes in T, X; & applicentur NP, NQ ad YA parallelæ, velocitatum ad puncta, M, N proportio componetur è proportione ipſius TP ad PM, & ipſius QN ad QX. Nam velocitas in M ad velocitatem uniformem per AY ſe habet ut TP ad PM; & velocitas iſta uniformis ſe habet ad velocitatem in N, ut QN ad QX. Ergo velocitas in M ad velocitatem in N ex his duabus rationibus PP ad PM, & QN ad QX componetur Notetur à concurſu tangentium ductâ FE ad AY parallelâ; fore TE, XE = TP. PM + QN. QX. Fig. 21.

XV. Obiter interjicio generalem hinc & bene facilem conſequi *Problematis iſtius ſolutionem*, quam tanti fecit, & cui tantum laborem impendit *Galilæus*, quámque *Torricellius* pronunciat eum quam optimè & ingenioſiſſimè reperiſſe. Rem ità proponit *Torricellius* (nam ipſe *Galilæus* ad manum non eſt) propoſitâ quâvis *parabolâ*, cujus *vertex* A oportet punctum aliquod ſublime reperire; è quo ſi grave cadat uſque ad A, & ex puncto cum impetu jam concepto horizontaliter convertatur, ipſa *propoſitam parabolam* deſcribat (notetur, quod motus deſcenſivus parabolam deſcribens non è puncto ſublimi, ſed ab ipſo puncto A cenſetur inchoare.) Huc recidit *Problema*, *Galilæi* ſuppoſitis inſiſtendo, ut determinentur particulares velocitates motuum, uniformis horizontalis, ſeu tranſverſi, & æqualiter creſcentis deſcenſivi quorum è compoſitione deſcripta concipitur exhibita parabola. Nos illud, quæcunque ſit creſcentis deſcenſivi motûs ratio, quicunque modus, generaliter exequemur; ſpecialem illum de *parabola* caſum in exemplum ſubjuncturi. || Reperiatur in recta AZ (quæ ſanè curvæ diameter eſt) punctum aliquod, ut P, à quo ſi ordinatim applicetur PM, & ducatur tangens MT, rectæ AZ occurrens in T, ſit intercepta TP æqualis ipſi PM; tum ſumatur in ZA protractâ recta AS = AP. Dico factum. Fig. 22.

Nam quoniam SA = AP, concipiet mobile deſcendens ab S in A tantum impetum, quantum ab A ad P curvam deſcribendo (ponitur enim increſcentis velocitatis motus utrobique prorſus idem) iſte verò impetus æquatur impetui, quo mobile à T deſcendens uniformi motu percurret rectam TP, eodem tempore quo recta AZ uniformiter

lata, perque motum istum in curva describenda conspirans, percurrit rectam PM. Cùm igitur sint TP, PM ex constructione pares, adeóque velocitates motuum, quibus simul peraguntur, æquales; etiam motus descensivus in P, vel M æquabitur motui transverso, curvam describenti, hoc est motus ab S ad A velocitas in A eidem æquatur. Ergo punctum S est id ipsum, quod inveniri debuit, & absolutum est propositum. Fig. 22. Exemplo sit *parabola*, quæ facta concipitur ex motu uniformi horizontali, & descensivo pariter accelerato; tum punctum P ita facilè per *Analysin* investigatur. Sit recta R *data parabolæ rectum latus*. Est igitur ex *parabolæ* natura, $R \times AP = PMq = TPq$ (ex hypotheli modi nostri generalis.) Item, ex parabolæ nota proprietate est $TPq = 4APq$. Ergo est $R \times AP = 4APq$. Adeóque $R = 4AP$; vel $\frac{1}{4}R = AP = SA$. Nimirum ita *Galilæus* determinavit. In hoc autem casu puncta T, S coincidunt. Quod si rursus gravia juxta *triplicatam temporum rationem* velocitate crescendo descendant, adeóque motus ipsorum talis cum uniformi transverso compositus *parabolam cubicam* describat, & sit R istius curvæ *parameter*, erit eo in casu $SA = \sqrt{\frac{Rq}{27}}$ nam ex hujusce curvæ proprietate est $Rq\,AP = PM$ cub. Et ex hujus regulæ generalis præscripto est $PM = TP$, adeóque PM cub. $= TP$ cub. Denique quoniam in hujusmodi *parabola* tangentis intercepta semper trisecatur à vertice (nimirum ut sit $AP = \frac{1}{3}TP$) est TP cub. $= 27\,AP$ cub. Erit igitur $Rq\,AP = 27\,AP$ cub. Adeóque $Rq = 27\,APq$; vel $\frac{Rq}{27} = APq = SAq$. In reliquis simili ratione procedentes assequemur propositum. Possent opinor & hinc nedum pleræque *Galilæi propositiones* huic affines, & hanc attingentes materiam utcunque deduci, sed & generaliores reddi, vel ad alia curvas omnigenas extendi. Verùm parco pluribus, hoc *specimine* (quoad ista) contentus; huc non nisi per transcursum adducto. Ad alia pergo prædictis cohærentia.

XVI. Si ad rectam lineam applicetur *plana superficies*, cujus singulæ quæque partes applicatis ad istam rectam parallelis interceptæ proportionales sint rectis ad rectam AY simpliciter divisam applicatis (ad AZ nempe parallelis.) Hujusce superficiei ad parallelogrammum æquealtum, super eadem basi constitutum, proportio proportionem indicabit ipsarum AP; TP, à puncto P vertici, tangentique interjectarum.

Ut

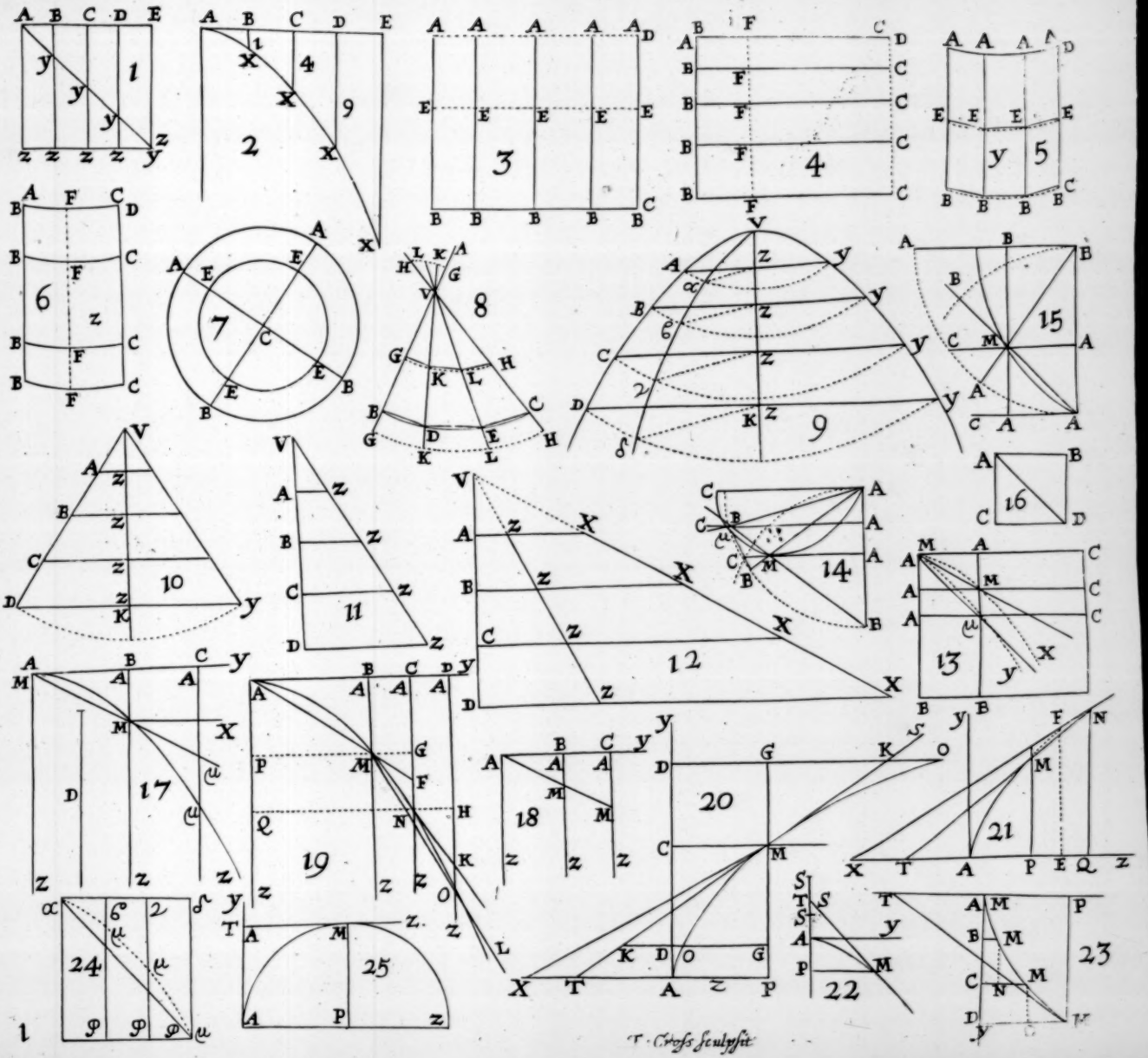
Ut ſi ad rectam $\alpha\delta$ applicetur plana ſuperficies $\alpha\delta\mu$, & utcunque divisâ AD punctis B, C, ſimilitérque dicisâ rectâ αd punctis ζ, γ, fuerit ut BM ad CM ità ſuperficies $\zeta\alpha\mu$, ad ſuperficiem $\gamma\alpha\mu$, & hoc in comparationibus univerſis taliter inſtitutis contingat; *completo parallelogrammo* $\alpha\delta\mu\varphi$, *ſe habebit recta* AP *ad rectam* TP *ut ſuperficies* $\alpha\delta\mu$ *adi parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$. Et enim ſi recta $\alpha\delta$ commune tempus deſignare concipiatur, quo recta AD motu æquabili, rectáque DM motu continuè accelerato tranſiguntur, recta $\delta\mu$ bene deſignabit velocitatem hujus definiti temporis maximam, quam habet punctum deſcendens in curvæ puncto M infimo; hoc eſt velocitatem quâ recta TP uniformiter decurritur eodem tempore; quapropter (ut antehac commonſtratum eſt.) *Parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$ optimè *Spatium* repræſentabit, quod hâc eâdem permanente velocitate per totum tempus $\alpha\delta$ uniformiter deſcribitur, hoc eſt ipſam rectam TP. Cum igitur, ex hypotheſis præſtratæ conditione, figura $\delta\alpha\mu$ rectam DM, vel AP, repræſentet, erit ut figura $\delta\alpha\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità AP ad TP; cognitaque proinde modo quovis iſtâ proportione, ſimul hæc innoteſcet; & reciprocè. Exemplo res manifeſtior evadet uno, vel altero. Propoſita curva ſit *parabola quadratica*, ſeu in qua rectæ BM, CM ſe habent, ut quadrata ex AB, AC, hoc eſt ut quadrata ex $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$. Ergò ſi figura $\alpha\delta\mu$ ſit triangulum, id optimè quadrabit huic negotio. Nam eo ſuppoſito ſemper triangula $\zeta\alpha\mu$, $\gamma\alpha\mu$ proportionalia erunt quadratis ex $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$, hoc eſt rectis BM; CM. Quoniam verò triangulum $\delta\alpha\mu$ parallelogrammi $\delta\alpha\varphi\mu$ eſt ſubduplum, erit recta AP quoque rectæ TP ſubdupla; quod ità ſe habere demonſtratum habetur in *conicis elementis*, & paſſim agnoſcitur. Sit rurſus curva AMM *parabola cubica*; & quoniam in ea rectæ BM, CM ſe habent ut cubi rectarum AB, AC, hoc eſt ut cubi rectarum $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$; & ſi *ſuperficies* $\alpha\delta\mu$ *fuerit complementum ſemiparabolicæ quadraticæ portionis, trilinea* $\alpha\zeta\mu$, $\alpha\gamma\mu$ *cubis ex* $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$ *proportionalia erunt* (ut à *Pappo*, ac aliis oſtenditur, & ex *Archimidea parabolæ dimenſione* quàm facillimè deducitur) itaque negotio propoſito quam rectiſſimè adaptetur *parabola quadratica*; cumque conſtiterit aliundè tum figuram $\alpha\delta\mu$ ſubtriplam fore parallelogrammi $\alpha\delta\mu\varphi$; erit etiam juxta regulæ jam aſſignatæ præſcriptum recta AP quoque ſubtripla rectæ TP. De qua concluſione ſatis convenit inter *Geometras*.

Fig. 23, 24.

Hæc poſthàc γνωμονικῶτερον *demonſtrata habentur.*

XVII. Huic ſuppar modus dictas rectas AP, TP comparandi tali *Theoremate* continetur: Si ad rectam aliquam lineam (hoc eſt ad ejus ſingula quæque puncta) applicentur rectæ lineæ parallelæ, ad rectam AD conſimiliter diviſam applicatarum differentiis proportionales, reſultantis hinc plani ad parallelogrammum æque altum, ad eandemque baſin poſitum, rectarum AP, TP proportionem exhibebit. Ut ſi rectæ AD, αδ ſimiliter (in partes ſcilicet æquales indefinitè multas) dividantur; & rectæ ζμ, γμ, δμ rectis BM, NM, OM (quæ differentiæ ſunt rectarum ad AD applicatarum, incipiendo à puncto A) proportionales ſint, erit ut figura αδμ ad parallelogrammum οδμφ, ità AP ad TP. Cùm enim recta quæpiam ex applicatis ad AD; puta *v. g.* DM æquetur omnibus ſeipsâ minorum differentiis (ipſis nempe BM, NM, OM) & trilineum αδμ conſtituatur è rectis ζμ, γμ, δμ eâdem proportione creſcentibus; ut & recta CM æquatur ipſis BM, NM; & ei reſpondens trilineum αγμ quaſi conflatur è parallelis ζμ, γμ pari ratione creſcentibus; & hoc ſemper eveniat; omnino patet trilinea αδμ, αγμ, αζμ rectis DM, CM, BM proportionari; proindéque modum hunc in priorem recidere; nec ab eo reipsâ differre. Notetur autem hìc rectas ζμ, γμ, δμ velocitates repræſentare, quas punctum mobile curvam delineans obtinet in reſpectivis ejus punctis M; ut & trilinea αζμ, αγμ, αδμ velocitates aggregatas exhibent ab initio ad definita reſpectiva temporis inſtantia; quibus (ut jam olim præmonitum) reſpondentia ſpatia BM, CM, DM proportionantur. Fig. 23, 24.

XVIII. E ſupradictis porrò conſectatur, quòd ſi *Circulus*, *Ellipſis*, ejuſmodíque curvæ recurrentes hoc progenitæ concipiantur modo, punctum eas deſcribens infinitam in recurſûs puncto velocitatem habebit. Nempe ſi quadrans AFM ità generetur; quoniam tangens TM diametro AZ eſt parallela, nec illa proinde cum hac niſi ad infinitam diſtantiam convenit; ergo velocitas in M ad velocitatem uniformis motûs per AY ſe habebit, ut infinita recta ad ipſam PM; unde velocitas iſta ad M prorſus infinita ſit oportet. Ità quidem quoad hujuſmodi curvas; at quoad alias ad infinitum ſenſim continuatas (quales *parabolæ* & *hyperbolæ*) deſcendentis puncti velocitas in quovis deſignato curvæ puncto finita eſt. Verùm his omiſſis ad alias propoſitæ curvæ proprietates exponendas progrediamur. Fig. 25. II. *precd.*


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
T. Cross sculpsit

TRINITY COLLEGE
LIBRARY
CAMBRIDGE

Lect. V.

IN deducendis è propoſitâ generatione curvarum affectionibus etiamnum progredimur.

I. *Anguli, qui ſiunt ab applicatis & tangentibus ad diverſa curvæ puncta, ſibimet inæquales ſunt; & minores ſunt illi qui puncto A (ſeu vertici) propiores ſunt.*

Tangant rectæ TM, XN; & ad AY parallelæ ſint MP, NQ; dico fore angulum PMT minorem angulo QNX.

Nam producta recta TM occurret ipſi QN extra curvam protractæ, puta ad E. Item ipſa XN ſecabit applicatam PM extra curvam, puta ad H. Manifeſtum eſt autem cum puncta H, N ſint ad alias, ac alias partes rectæ ME, rectas ME, NH ſeſe interſecare inter parallelas PH, QE; quare major eſt angulus externus QNX interno QET, hoc eſt angulo PMT: Q.E.D. Fig. 26.

II. Hinc *poriſmatis* loco habetur *tangentes ſe interſecare inter ordinatim applicatas per puncta contactuum; velut ad F, inter PM, QN protenſas.*

III. Item *angulum PTM angulo QXN majorem eſſe*; (externum ſcilicet interno.)

IV. Item patet vertici propiores applicatas (proindéque rectas quaſvis aliis parallelas) curvæ obliquiùs incidere quam remotiores.

Cæterùm iſta jam olim de *Sectionibus Conicis* oſtenderat *Apollonius*, ut in edito nuper VI *conicorum libro* eſt videre

V. In figura præcedente (poſito applicationis angulum TAY rectum eſſe, vel obtuſum) *dico curvæ arcum MN rectâ NH, majorem eſſe; rectâ verò ME minorem.*

Nam

Nam connectatur ſubtenſa M N, ducatúrque recta N R ad Z A parallela. Et quoniam angulus X P H non minor eſt recto, erit, eo major externus, N H P obtuſus. Ergò recta N M major eſt quàm N H. Itaque magis arcus, arcus N H major eſt quàm ipſâ N H: Q. E. D.

Item, quoniam ang. R N E ipſi X Q E par haud minor eſt recto, erit R E ⌐ R N. quare M R + R E ⌐ M R + R N. hoc eſt M E ⌐ M R + R N. Eſt autem (ex *Archimedis* aſſumptis) M R + R N ⌐ arc. M N. ergò magis eſt M E ⌐ arc. M N. ∴

VI. Perutilis eſt hæc propoſitio in *tangentium demonſtrationibus expediendis*. Etenim hinc conſectatur, ſi arcus M N indefinitè parvus ponatur, ejuſce loco alterutram tangentis particulam M E, vel N H tutò ſubſtitui.

Speciminis hîc loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium, & conſimili modo deſcriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonſtratione munitam.

Fig. 27. Recta A Y ſibi parallelè deportata quamcunque curvam ad eaſdem partes convexam aut cavam, A P X perambulet uniformi motu (ſcilicet ut æquales curvæ partes æqualibus tranſigat temporibus) eodémque ſimul tempore punctum aliquod ab A per A Y etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva A M Z; cujus ad datum quodcunque punctum M tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta M P ad A Y parallela, curvam A P X ſecans in P; pérque P ducatur recta P E curvam A P X contingens; huic verò per M ducatur parallela M H; ínque hac ſumatur punctum quodpiam R, & ducatur R S ad P M parallela; tum fiat ut curva A P ad rectam P M (hoc eſt ut unus motus uniformis ad alterum) ità M R ad R S; & connectatur M S. hæc curvam A M Z continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis Z, per quod ducatur recta Z X ad M P parallela, ſecans curvam A P X in X, ejúſque tangentem in E; & huic parallelam M R in H; ipsámque demum M S in K. Sit autem primò punctum Z ſupra M verſus A; unde recta P E ⊐ arc P X. adeóque P A. P E ⌐ arc P A. P X :: P M. P M — X Z :: P M. E H — X Z :: P M. Z H — E X ⌐ P M. Z H. quare permutatim erit P A. P M ⌐ P E. Z H. eſt autem P A. P M :: M R. R S :: M H. K H :: P E. H K. ergò P E. H K. ⌐ P E. Z H. quare H K ⊐ Z H. eſt autem punctum H extra curvam A Z M; ob E Z ⊐ X Z ⊐ P M = E H. ergò palàm eſt punctum K extra curvam A Z M exiſtere. Sit verò ſecundò punctum

punctum Z infra punctum M ; erit tum recta P E major arcu P X; unde arc P A. P E ⊐ arc P A. P X :: P M. X Z — P M :: P M. X Z — E H :: P M. X E + X Z ⊐ P M. H Z. & viciſſim P A. P M ⊐ P E. H Z. Verum ut prius) eſt P A. P M :: P E. H K. ergò P E. H K ⊐ P E. H Z ; propterea que H K ⊏ H Z ; rurſus itaque liquet Punctum K extra curvam exiſtere. Tota proinde recta M K Z extra curvam verſatur ; & eam tangit ad M : Q. E. D. In tranſcurſu hoc . ad alias curvæ noſtræ paſſiones revertamur. Fig. 27.

VII. Si tangenti cuipiam (ut ipſi M T) parallela ducatur quæpiam E F (à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T ſumpto) hæc curvæ occurret.

Si enim infra punctum M in curva ſumatur punctum quodlibet, & ab eo duci concipiatur curvam tangens recta ; huic occurret tangens T M infra ordinatam P M . ergò recta E F eidem occurret ; at curvam priùs tranſiliat oportet . ergò liquet Propoſitum. Fig. 28.

VIII. Eâdem operâ patet, ſi punctum aſſumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectum E F curvæ bis occurſuram, tam ſupra quàm infra contactum M.

Operosè conniſus eſt *Apollonius* hæc de *Sectionibus Conicis* oſtendere. *Con. I.* 27, 28.

Cæterùm ad penitus determinandos occurſuum locos *Specialis modus ſeu ratio motuum deſcendentis atq; tranſverſi cognoſci debet* ; tunc eos *Analyſis* ſtatim prodet.

IX. Si duæ rectæ quævis (H M, K N) ad curvam propoſitam æqualiter inclinentur (hoc eſt æquales cum ejus ad occurſus tangentibus (puta cum ipſis M T, N X) angulos efficiant) hæ extrorſum divergent, ſeu ad partes E F productæ concurrent. Fig. 29.

Nam ducatur ſubtenſa N M ; hæc utiq; ſecundum antedicta cum ipſa A Z conveniet, puta ad O. Eſt ergò ang O M H ⊐ (ang. T M H = ang. X N K ⊐) ang. O N K. ergo ang. H M N + M N K ⊏ 2 rect. ergò rectæ H M, K N concurrunt ad partes E F. Limitandum eſt hoc, intelligendo pares angulos H M A, K N A ad eaſdem partes veſari ; ſeu alterum alteri ſore externum interno . alias cotnra eveniet.

X. Si fuerit recta H M *curvæ* perpendicularis (hoc ejus tangenti M T) & in hac ſumatur quæpiam definita H M ; erit H M minima rectarum omnium, quæ à puncto H duci poſſunt ad curvam. Fig. 30. *Apoll. I.* 38 3c.

Nam connectatur ſubtenſa MN, ducatúrque recta NR ad ZA parallela. Et quoniam angulus XPH non minor eſt recto, erit, eo major externus, NHP obtuſus. Ergò recta NM major eſt quàm NH. Itaque magis arcus, arcus NH major eſt quàm ipsâ NH: Q.E.D.

Item, quoniam ang. RNE ipſi XQE par haud minor eſt recto, erit RE ⊏ RN. quare MR + RE ⊏ MR + RN. hoc eſt ME ⊏ MR + RN. Eſt autem (ex *Archimedais* aſſumptis) MR + RN ⊏ arc. MN. ergò magis eſt ME ⊏ arc. MN.∴

VI. Perutilis eſt hæc propoſitio in *tangentium demonſtrationibus expediendis*. Etenim hinc conſectatur, ſi arcus MN indefinitè parvus ponatur, ejuſce loco alterutram tangentis particulam ME, vel NH tutò ſubſtitui.

Speciminis hîc loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium, & conſimili modo deſcriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonſtratione munitam.

Fig. 27. Recta AY ſibi parallelè deportata quamcunque curvam ad eaſdem partes convexam aut cavam, APX perámbulet uniformi motu (ſcilicet ut æquales curvæ partes æqualibus tranſigat temporibus) eodémque ſimul tempore punctum aliquod ab A per AY etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva AMZ; cujus ad datum quodcunque punctum M tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta MP ad AY parallela, curvam APX ſecans in P; pérque P ducatur recta PE curvam APX contingens; huic verò per M ducatur parallela MH; ínque hac ſumatur punctum quodpiam R, & ducatur RS ad PM parallela; tum fiat ut curva AP ad rectam PM (hoc eſt ut unus motus uniformis ad alterum) ità MR ad RS; & connectatur MS. hæc curvam AMZ continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis Z, per quod ducatur recta ZX ad MP parallela, ſecans curvam APX in X, ejúſque tangentem in E; & huic parallelam MR in H; ipsámque demum MS in K. Sit autem primò punctum Z ſupra M verſus A; unde recta PE ⊐ arc PX. adeóque PA.PE ⊏ arc PA.PX:: PM.PM—XZ :: PM.EH—XZ ::PM.ZH—EX ⊏ PM.ZH. quare permutatim erit PA.PM ⊏ PE.ZH. eſt autem PA.PM :: MR.RS :: MH.KH::PE.HK. ergò PE.HK. ⊏ PE.ZH. quare HK ⊐ ZH. eſt autem punctum H extra curvam AZM; ob EZ ⊐ XZ ⊐ PM = EH. ergò palàm eſt punctum K extra curvam AZM exiſtere. Sit verò ſecundò punctum

punctum Z infra punctum M; erit tum recta PE major arcu PX; unde arc PA. PE ⊐ arc PA. PX :: PM. XZ — PM. : PM. XZ — EH :: PM. XE + XZ ⊐ PM. HZ. & viciſſim PA. PM ⊐ PE. HZ. Verum ut priùs) eſt PA. PM :: PE. HK. ergò PE. HK ⊐ PE. HZ; proptereáque HK ⊏ HZ; rurſus itaque liquet Punctum K extra curvam exiſtere. Tota proinde recta M K Z extra curvam verſatur; & eam tangit ad M: Q. E. D. In tranſcurſu hoc. ad alias curvæ noſtræ paſſiones revertamur. Fig. 27.

VII. Si tangenti cuipiam (ut ipſi M T) parallela ducatur quæpiam E F (à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T ſumpto) hæc curvæ occurret.

Si enim infra punctum M in curva ſumatur punctum quodlibet, & ab eo duci concipiatur curvam tangens recta; huic occurret tangens TM infra ordinatam PM. ergò recta E F eidem occurret; at curvam priùs tranſiliat oportet. ergò liquet Propoſitum. Fig. 28.

VIII. Eâdem operâ patet, ſi punctum aſſumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectum E F curvæ bis occurſuram, tam ſupra quàm infra contactum M.

Operosè conniſus eſt *Apollonius* hæc de *Sectionibus Conicis* oſtendere. *Con. I.* 27, 28.

Cæterùm ad penitus determinandos occurſuum locos *Specialis modus ſeu ratio motuum deſcendentis atq; tranſverſi cognoſci debet*; tunc eos *Analyſis* ſtatim prodet.

IX. Si duæ rectæ quævis (H M, K N) ad curvam propoſitam æqualiter inclinentur (hoc eſt æquales cum ejus ad occurſus tangentibus (puta cum ipſis M T, N X) angulos efficiant) hæ extrorſum divergent, ſeu ad partes E F productæ concurrent. Fig. 29.

Nam ducatur ſubtenſa N M; hæc utiq; ſecundum antedicta cum ipſa A Z conveniet, puta ad O. Eſt ergò ang. O M H ⊐ (ang. T M H = ang. X N K ⊐) ang. O N K. ergo ang. H M N + M N K ⊏ 2 rect. ergò rectæ H M, K N concurrunt ad partes E F. Limitandum eſt hoc, intelligendo pares angulos H M A, K N A ad eaſdem partes veſari; ſeu alterum alteri ſore externum interno. alias cotnra eveniet.

X. Si fuerit recta H M *curvæ* perpendicularis (hoc ejus tangenti M T) & in hac ſumatur quæpiam definita H M; erit H M minima rectarum omnium, quæ à puncto H duci poſſunt ad curvam. Fig. 30. *Apoll. V.* 38 &c.

Ducatur enim quævis HO; hæc tangenti priùs occurret, puta ad R. liquet HR majorem esse quàm HM; multóq; magis esse HO ⊏ HM,

XI. Hinc *Circulus Centro* H per M descriptus *curvam* continget.

XII. Etiam inversè, si HM minima sit omnium quæ ab H ad curvam duci possunt, erit HM curvæ perpendicularis.

Nam quoniam HM minima ponitur, circulus centro H, intervallo quovis HS, majori quàm HM, curvam secabit, & proinde tangentem MT, hanc puta in R. ergò quum sit HR ⊏ HM, non erit angulus HRM rectus. idem de punctis omnibus in recta TM evidens est. ergò tangenti perpendicularis non alibi quàm in punctum M cadit.

Fig. 31. XIII. Quinetiam si recta HM minima sit omnium quæ ab H duci possunt, eiq; perpendicularis sit recta TM; hæc curvam tanget.

Nam tangat alia, (si fieri potest) XM; erit igitur XM ad HM perpendicularis. Unde pares erunt anguli HMX, HMT; totum & pars Q. E. A.

Fig. 32. XIV. Dico porrò minimæ HM propiorem HN remotiore HO minorem esse.

Nam ducatur subtensa MN; hæc producta curvam transgredietur, & ipsam HO secabit, puta in R. & quoniam Angulus HMR obtusus est (major illo nempe, quem tangens cum HM constituit ad M) erit HNR magis obtusus, adeòq; recta HR ⊏ HN & magis HO ⊏ HN.

XV. Hinc perspicuum est Circulum quemvis Centro H descriptum, uno tantùm ad eadem puncti M partes puncto curvæ occurrere; nec omnino pluries igitur, quàm in duobus punctis.

Fig. 33. XVI. Perpendiculari HM parallelæ sint rectæ IN, KO; harum propior IN remotiore KO rectiùs incidet.

Nam per N, O ducantur ipsi curvæ perpendiculares EN, FO; hæ cum ipsa HM intra curvam convenient, puta ad R, & P; sibi verò ipsis in Q.

Liquet jam esse ang. FOK = ang. FPH ⊏ ang. PRQ = ang. NRH = ang. ENJ. Cùm ergò sit ang. FOK major angulo ENJ, liquet propositum. XXXVII.

XVII. Si à puncto quopiam H in perpendiculari H M aſſumpto ducantur ad curvam rectæ H N, H O; harum propior H N, remotiore H O rectiùs incidet.

Nam ducantur E N, F O curvæ perpendiculares, & I N, K O ad ipſam H M parallelæ. Eſt igitur ang. F O K ⊏ ang. E N I. Item ang. O H M ⊏ ang. N H M. hoc eſt ang. K O H ⊏ ang. I N H. quare ang. F O K + K O H ⊏ ang E N I + I N H. hoc eſt ang. F O H ⊏ ang. E N H. Unde conſtat Propoſitum. Fig. 34.

XVIII. Hinc patet à perpendiculari progrediendo, (ab uno nempe puncto H) incidentium *obliquitatem* creſcere, donec ad illam devenitur, quæ *curvam* tangit, omnium obliquiſſima.

XIX. Porrò ſi introrſum jam ſumatur punctum H, & ab eo incidens H M ſit omnium curvæ incidentium minima; erit H M *curvæ* perpendicularis, ſeu tangenti M T. Fig. 35.

Nam dic aliam M R tangenti perpendicularem eſſe. ergò H R ⊐ H M. & magis H O ⊐ H M. quare H M non eſt minima contra *Hypotheſin*. *Apoll. V.* 32.

XX. Item ſi recta H M ſit omnium ab H curvæ incidentium *maxima*, erit H M curvæ perpendicularis. *Apoll. V.* 29.

Nam Circulus Centro H per M deſcriptus extra curvam totus cadet. ergò ſi recta M T Circulum tangat, hæc magis extra curvam cadet, eamq; proinde continget. Eſt autem ang. H M T rectus. ergò liquet. Fig. 36.

XXI. Hinc ſi M T ſit minimæ vel maximæ H M perpendicularis; hæc *curvam* tanget. *Apoll. V.* 30, 31.

Nam ſi dicatur alia M X tangere; erit ideò ang. X M H rectus, & par angulo T M H: Q. E. A.

XXII. Exhinc ſi recta Y M non ſit curvæ perpendicularis; in ea nulla ſumi poteſt *maxima*, vel *minima*.

Nam ſi ſumi poſſet, eſſet ex eo ipſo Y M curvæ perpendicularis contra *Hypotheſin*. *Apoll. V.* 31, 32.

XXIII. Si H M ſit incidentium minima, & intra ipſam ſumatur punctum quodpiam I; erit etiam I M minima. *Apoll. V.* 30.

Fig. 37. Cùm enim *circulus centro* H per M deſcriptus *curvam* intrórſum tangat, etiam magis *circulus centro* I *deſcriptus* introrſum tangat. unde liquet.

XXIV. Etiam ſi H^M ſit incidentium maxima, & extra ipſam accipiatur punctum quodpiam I, erit I^M maxima.

Apoll. V. 39. Cùm enim *Circulus Centro* H *per* M *deſcriptus curvam* extrorſum contingat, etiam potiori jure *Circulus Centro* I *per* M *deſcriptus eandem extrorſus continget.* unde conſtat *Propoſitum.*

Cæterùm *minimarum & maximarum propior determinatio pendet ex ſpeciali curvæ natura.*

De hac autem Tabula jam manum auferemus; nec enim impræſentiarum hujuſmodi pleraq; complecti profitemur. Inſtituto noſtro ſufficit hactenus generalis cujuſdam curvarum proprietates comprehendentis Doctrinæ *ſpecimen* exhibuiſſe: qualis certè, plenior & perfectior, *haud exiguum videtur rebus Geometricis* (quæ nempe circa *curvarum proprietates & affectiones* plurimùm occupantur) *compendium allaturæ.* Nè dicam culpæ agnatum videri, *Logicæq;* Regulis haud admodum congruere, quæ toti cuipiam generi conveniunt, & quæ de communi quadam origine manant, ea quibuſdam partibus adſcribere, vel ex anguſtiori fonte derivare. *Plura* forſan, & *abſtruſiora* proferemus aliquando. Nunc his ſupersedemus.

LECT. VI.

LECT. VI.

AD eaſdem partes vergentium curvarum, è communi quadam generatione deductas, generales aliquot affectiones jam antea dudum expoſui; illas præſertim, quas à veteribus *Geometris* obſervaram ſpecialibus, quas ipſi tractant, curvis applicari. Jam non ingratum facturus videor, ſi complures alias (abſtruſiores quidem illas, at non injucundas prorſus, aut inutiles) appoſuero; pro meo more quam conciciſſimè demonſtratas, eâ tamen ratione quoad potero, quæ cumprimis ſcientifica videtur, hoc eſt quæ nedum concluſionum veritatem aſſerit, at fontes etiam aperit, unde illa promanat. Verſantur autem præcipuè quæ proferemus, partim *circa tangentium abſque calculi moleſtia vel faſtidio inveſtigationem ſimul ac demonſtrationem expeditam* (è ſimplicioribus nempe vulgatioribúſque perplexiora minúsque perſpecta deducendo) *partim circa multarum magnitudinum dimenſiones, tangentium deſignatarum ope, quam promptiſſimè determinandas*; quæ materiæ tum præ Geometricis aliis quodammodo difficiles videntur, tum non penitus adhuc (ſicut aliæ quædam) occupatæ vel exhauſtæ ſunt, ad hunc ſaltem modum quod ſciam nondum tractatæ Quin è veſtigio rem aggredimur, *Lemmatica* quædam utcunque, quorum in reliquis clarius & brevius oſtendendis aliquem proſpicimus uſum, prælibantes.

II Sit *angulus rectilineus* A B C, & datum punctum D, ſit item linea O D O talis, ut per D ductâ quàvis rectâ D N, ſit anguli lateribus intercepta M N æqualis à puncto D, & linea O D O interceptæ D O; erit linea O D O *Hyperbola*. Fig. 38.

Nam ducatur D L ad C B parallela occurrénſq; ipſi A B in L; & in protracta B L ſumatur L Z = L B; ducatúrq; Z S ad B C parallela; item ducatur O K ad B Z parallela. Et ob poſitam D O = M N; erit H O = B N; ergò quum ſit D H. H O :: (D L. L N :: D L—

D H.

DH. LN — HO :: LH. LB ::) LH. HK. erit DH × HK = HO × LH; hoc est DL × HK — LH × HK = KO × LH — HK × LH. unde erit DL × HK = KO × LH. vel ZL × LD = ZK × KO. ergò constat lineam O DO esse *Hyperbolen*, cujus *Asymptoti* ZA, ZS. Breviùs hoc ostendi posset, producendo rectam N D S. Nam est DS = DM = DO ± OM = NM ± OM = ON. Similiter quartam & nonam breviùs demonstres licet.

Fig. 38. Quinimò si MN ad DO quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea O DO *Hyperbola* erit; Nempe si tum fiat R. S :: LB. LZ; & R. S :: DL. DE; & per Z ducatur ZS ad BC; ac per E transeat RE ad ZA parallela, cum ZS conveniens in Y; erunt YR, YS dictæ *Hyperbolæ asymptoti* quod jam sufficerit innuisse.

Hinc in transcursu noto facilè confici *Problema (quo problematum confectiones istæ Archimedeæ, ac Vietæ ope primæ Conchoidis peractæ, ad Sectiones conicas rediguntur)* Per datum punctum D rectam lineam ducere, sic ut anguli dati A B C lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam descriptâ hyperbolâ O DO; centro D, intervallo datam T æquante describatur circulus P O Q *hyperbolam* intersecans in O; & producatur DON; fiétq; MN = DO = T. Modus autem hic generalior est, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39. IV. Sit angulus A B C, et punctum datum D; sit etiam linea O BO talis, ut per D ductâ quâpiam rectâ DN, sit anguli lateribus intercepta MN ad rectâ BC curvâque O B O interceptam MO in eadem semper ratione (puta X ad Y;) erit linea O B O *hyperbola.*

Fig. 39. Ducatur enim recta DL ad CB parallela, ipsi AB occurrens in L; secentúrque DL, BL punctis E, F, ut sit DL. DE :: X. Y :: BL. BF; tum per E ducatur recta ER, ad BA; & per F recta FS ad BC parallela; concurrántque rectæ ER, FS puncto Z; denuò per punctum O ducatur OH ad AB parallela. Jam ob DL. DH :: LN. HO :: LB + BN. HO :: DE × LB + DE × BN. DE × HO. item DL × KO = DE × BN (nam DL. DE :: MN. MO :: BN. KO) & DE × LB = DL × BF (ob DE. DL :: BF. LB;) erit DL. DH :: DL × BF + DL × KO. DE × HO; hoc est DL × BF + DL × KO. DH × BF + DH × KO :: DL × BF + DL × KO.

DE

DE × HO ergò DH × BF + DH × KO = DE × HO; hoc est DH × BF + DH × HO — DH × BL = DE × HO; transponendo igitur est DH × HO — DE × HO = DH × BL — DH × BF. hoc est EH × HO = DH × FL; vel EH × GO + EH × HG = DE × FL + EH × FL; quare, demptis æqualibus, est EH × GO = DE × FL; vel ZG × GO = DE × FL; cum itaque DE × FL sit quid determinatum, constat lineam OBO esse hyperbolam, cujus asymptoti ZR, ZS. Fig. 39.

V. Si MO capiatur ad alteras rectæ BC partes, etiam DE. BF ad alteras punctorum D, B partes accipi debent; uti Schema monstrat; nec abludit modus demonstrandi. Fig. 40.

VI. Consectarium. Si recta BQ angulum ABC secet, perque punctum D ducantur utcunque duæ rectæ MN, XY rectam BQ intersecantes punctis OP (quorum utique sit O propius ipsi B) erit MN.MO ⊐ XY.XP. Nam per O descripta concipiatur *hyperbola* VOB (qualem jam mox attigimus, sic ut interceptæ rationem habeant illam quam MN ad MO) erit igitur MN.MO::(XY.XV) ⊐ XY.XP. Fig. 41.

Coroll. Dividendo est NO.MO ⊐ YP.PX.

VII. Quinimò si plures lineæ BQ, BG angulum ABC secent; & à puncto D projiciantur rectæ DN, DY (quæ rectas alteras intersecant ut vides; quarúmque DN puncto B vicinior;) erit NE.MO ⊐ YF.VX. Fig. 42.

Nam NE.EO ⊐ YF.FV; & EO.OM ⊐ FV.VX. igitur ex æquo est NE.OM ⊐ YF.VX. ||

VIII. Etiam exindè patet, per B (ad partes alterutras) rectam duci posse; ità ut è D eductarum partes ab illa rectáque BC ad interceptas à rectis BA, BC rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam sumatur PQ = PZ; ergò connexa BQ *hyperbolam* OBO tangit; & liquet à rectis BQ, BC interceptas ad interceptas à BC, BA minorem rationem habere, quam habent interceptæ ab hyperbolâ OBO & recta BC ad easdem; hoc est minorem datâ quâpiam.

IX. Sit rursum angulus rectilineus ABC, & punctum D; item linea Fig. 43.

linea OOO talis, ut si è D utcunque ducatur recta DO, secans
Fig. 43. anguli latera punctis M, N, habeat DM ad NO semper eandem rationem (puta X ad Y) erit etiam linea OOO hyperbola.

Nam ducatur DL ad BC parallela; sitque DL. DE :: X. Y; & per E ducatur E *R* ad AB parallela; secans BC in *Z*; demum per O ducatur OH ad BA parallela.

Est jam DL. DE :: DM. NO :: LM. GO (ob similia triangula DLM, NGO) :: LM × DH. GO × DH item DL × HO = LM × DH (ob DL. LM :: DH. HO) quare DL. DE :: DL × HO. GO × DH hoc est DL × HO. DE × HO :: DL × HO. GO × DH adeóq; DE × HO = GO × DH. hoc est DE × HG + DE × GO = GO × DE + GO × EH quare (communi sublato) est DE × HG = GO × EH; seu DE × HG = GO × ZG. Patet itaque curvam OOO esse *hyperbolam* cujus *asymptoti* ZR ZC.

Coroll. Si ratio data sit æqualitatis (ceu DM = NO,) ipsæ AB, CB asymptoti erunt.

Sequentia quædam, quia magis id perspicuum videtur, Algebricè monstrabimus.

X. Esto positione data recta ID, in qua punctum designatum D,
Fig. 44. sit item curva DNN talis ut in ID sumpto quopiam puncto G, & ductâ rectâ GN ad positionem datam IK parallelâ; tum adsumptis determinatis rectis *m*, *b*; positisq; DG = *x*, & GN = *y*; sit constantèr $my + xy = \frac{m}{b}xx$; erit linea DNN *hyperbola*; quæ sic determinatur; sumantur DM, & DO (hinc indè) pares ipsi *m*; & per M ducatur ML jad IK parallela, factóq; *b*. *m* :: *m*. MQ; sit $MZ = 2\,MQ = \frac{2mm}{b}$; tum per Z, O traducatur recta ZT; erunt ZM, ZT asymptoti.

Ducatur enim ZS ad MO parallela, cui occurrat NG in R (quæ & ipsam ZT secet in P). & connectatur DQ. Est ergò PN = RG + GN − RP. Verùm est MD. MQ :: ZR (MG). RP; hoc est $m . \frac{mm}{b} :: m + x . RP = \frac{mm}{b} + \frac{mx}{b}$ adeóq; $RG - RP = \frac{mm}{b} - \frac{mx}{b}$ ergò $PN = \frac{mm - mx}{b} + y$. Unde $PN \times MG = \frac{m^3}{b} + my + xy - \frac{mxx}{b}$ Verùm (ex hypothesi) est *my* +

$+xy-\frac{mxx}{b}=o$. ergò $PN\times MG=\frac{m^3}{b}=MD\times ZQ$. vel $PN.ZQ::(MD.MG::)\ QD.ZP$. Quapropter eſt $PN\times ZP=ZQ\times QD$. Unde palàm eſt curvam D N N eſſe hyperbolam, cujus aſymptoti Z M, Z T. Fig. 44.

XI. Notetur; ſi æquatio ſit $my-xy=\frac{m}{b}xx$; eadem habebitur *hyperbola*; tunc ſolùm puncta G ad partes D M ſumuntur. Quin & ſi æquatio ſit $xy-my=\frac{m}{b}xx$; puncta G ultra M capiendo, proveniet *hyperbola*, huic ipſi *conjugata*.

XII. Sit Triangulum B D F; & linea D N N talis, ut ductâ utcunque R N ad B D parallelâ (quæ lineas B F, D F, D N N ſecet punctis R, G, N) connexâque rectâ D N; ſit perpetuò D N proportione media inter R N, N G; erit linea D N N *hyperbola*. Fig. 45.

Per D ducatur D K ad D B perpendicularis (ſecans ipſam R N in E) & ſit F H ad D B parallela; vocentúrque D B $=b$; D F $=d$; F H $=f$; tum D G $=x$; & G N $=y$; Eſtque $d.f::x.\frac{fx}{d}=GE$; unde $\frac{2fxy}{d}+xx+yy=2EG\times GN+DGq+GNq=DNq$. Porrò eſt $d.b::FG.GR::d-x.RG=b-\frac{bx}{d}$. Unde $RN=b-\frac{bx}{d}+y$. Et ideò $by-\frac{bxy}{d}+yy=RN\times NG=DNq=\frac{2fxy}{d}+xx+yy$. quare $by-\frac{bxy}{d}=\frac{2fxy}{d}+xx$. quam æquationem ordinando fit $\frac{db}{2f+b}y-yx=\frac{d}{2f+b}xx$. quòd ſi ponatur $m=\frac{db}{2f+b}$; erit $my-xy=\frac{m}{b}xx$. Unde liquet D N N eſſe *hyperbolam*, qualis habetur in præcedente determinata,

Not. Si angulus D G N rectus fuerit, evaneſcente tum $f=o$, erit

$d = m$; vel $dy - xy = \frac{d}{b}xx$. Aliaquædam hîc (nonnulla forsan παρέργως) inseremus.

Fig. 46. XIII. Sit positione data recta I D; sit item curva D N N talis, ut in I D sumpto puncto quopiam G, ductâque rectâ G N ad positionem datam I K parallelâ; sumptisque determinatis lineis g, m, r; positisque $DG = x$, & $GN = y$; sit perpetim $yx + gx - my = \frac{m}{r}xx$; linea D N N erit *hyperbola*, sic determinabilis: Sumatur $DM = m$; & per M ducatur M L ad I K parallelâ; & in hac accipiatur $MQ = \frac{mm}{r}$; & sit $QY = MQ$; & ab M Y auferatur $YZ = g$; connexâque Q D, ducatur Z T ad Q D parallelâ; erunt Z M, Z T *asymptoti*.

Nam ducatur Z S ad M D parallela; cui occurrat G N producta in R (sed & G R ipsam Z T secet in P). Estque jam $PN = RG - RP - GN = \frac{mm}{r} - g + \frac{mx}{r} - y$. adeoque $PN \times MG = \frac{m^3}{r} - mg + yx + gx - my - \frac{m}{r}xx = \frac{m^3}{r} - mg + o. = \frac{m^3}{r} - mg = DM \times ZQ$. unde $PN . ZQ :: (DM . MG ::) QD . ZP$. ergò $PN \times ZP = ZQ \times QD$. Liquet igitur curvam D N N esse *hyperbolam*, cujus *asymptoti* Z M, Z T.

Si æquatiò sit $-yz + gx + my = \frac{m}{r}xx$; eadem erit *hyperbola*. Sed puncta G inter B, M tunc accipiuntur; & ità prout aliis ac aliis locis puncta G designantur, æquationis signa variantur; at non est ea jam exponendi locus.

Fig. 47. XIV. Positione datæ sint rectæ D B, B A; perque rectam D B feratur recta C X ad B A parallela; item per punctum D rotando transeat recta D Y, sic ipsam B A secans in E, ut sit inter rectas B E, D C eadem semper proportio (puta quæ cujusdam assignatæ R ad D B) rectæ verò D E, C X se intersecent punctis N; erit linea D N N *Parabola*.

Nam sit $R . DB :: DB . P$. Est ergò $BE . DC :: DB . P$. Item est $DB . BE :: DC . CN$. ergò $DB . BE + BE . DC = DC . CN$

CN + DB. P. hoc est DB. DC :: DC × DB. CN × P. hoc est DB × DC. DCq :: DC × DB. CN × P. Quapropter est DCq = CN × P; ergo patet *curvam D N N esse parabolam*, cujus *parameter* P, *vertex* D; *diameter* ipsi B A parallela.

Dedit hoc *Gregorius* à S. *Vincentio*,* sed operosâ (si probè memini) prolixitate, demonstratum. * In Lib. de Spirali.

XV. Adjicimus; Si reliquis iisdem positis, ità ferantur CX, & DY, ut jam semper habeant BE, BC rationem eandem (puta quam BD ad R) erunt etiam intersectiones ad *parabolam*. Fig. 48.

Nam bisecetur DB in G, ducatúrque GV ad BE parallela, secans curvam DNN in V; & quoniam est BC. R :: BE. BD :: CN. CD, erit BC × CD = R × CN. ergò (secundum benè notam *parabolæ proprietatem*) est curva DNN *parabola*, cujus *parameter* R, *diameter* GV.

Proletaria sunt forsan ista; sed non perinde notata occurunt hæc:

XVI. Si reliquis similiter positis, recta CX non jam ad ipsam BA, sed ad aliam positione datam (DH) feratur parallela; sitque perpetuò BE. DC :: DB. R; erunt *intersectiones* N ad *hyperbolam*. Fig. 49.

Nam ductâ NG ad BA parallelâ, nuncupentur DB = *b*. BH = *b*; DG = *x*. GN = *y*. Estque $x.y :: b.\frac{by}{x} = BE$. item $b.b :: y.\frac{by}{b} = GC$. quare $CD = x - \frac{by}{b}$. Est igitur (ex hypothesi) $\frac{by}{x}.x - \frac{by}{b} :: b.r$; unde talis ordinabitur æquatio; $yx + \frac{bry}{b} = \frac{b}{r}xx$. ponendóq; $\frac{br}{b} = m$; erit $yx + my = \frac{m}{r}xx$; est ergò curva DNN *hyperbola*,* quæ suprà habetur determinata. * In 10 hujus.

XVII. Quinetiam si (reliquis, ut in præcedente, suppositis) ità jam feratur CX, ut semper habeat BE ad BC rationem eandem, quam BD ad R; erunt itidem intersectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ NG ad AB parallelâ, nominentur rectæ, ut in præeunte; èstque jam $BC = b - x + \frac{by}{b}$; atque $\frac{by}{x}.b - x + \frac{by}{b}$

$\frac{by}{b} :: b.r$. unde talis emerget æquatio: $yx + hx - \frac{hr}{b}y = \frac{h}{b}$

Fig. 50, 51, 52. $\times x x$; hoc eſt (poſito $\frac{hr}{b} = m$) $yx + hx - my = \frac{m}{r} xx$; Eſt igitur curva B N N *hyperbola*, qualem ſuperiùs exhibuimus determinatam.

XVIII. Datæ poſitione ſint rectæ D B, B A; (& in D B deſignetur punctum D) ſitque linea D N N talis, ut ductâ utcunque G N ad B A parallelâ; ſumptis verò determinatis g, r, vocatiſque D G $= x$; & G N $= y$, ſit $ry - yx = gx$; erit linea D N N *hyperbola*, ſic determinanda.

Fig. 53. Capiatur D E $= r$, & B O $= g$; & per E ducatur recta E R ad B A, ac per O recta O S ad B D parallelæ; erunt Z R, Z S *aſymptoti*.

Nam ductâ N P ad D B parallelâ, eſt Z P $= g + y$; & P N $= r - x$; quare Z P $\times$ P N $= gr - gx + ry - yx$. Verùm ex hypotheſi eſt $- gx + ry - yx = o$. ergò Z P $\times$ P N $= gr =$ Z E $\times$ E D. undè liquido conſtat Propoſitum.

Quòd ſi fuerit æquatio $xy - ry = gx$; ſumenda eſt D E $= r$; & B O $= g$ (infra rectam D B) ductiſque, ceu priùs, parallelis S Z R; erit *hyperbola* N N N angulo S Z R comprehenſa; quod eodem facilè comprobatur modo.

XIX. Datæ poſitione ſint rectæ D B, B A; ac ità ferantur rectæ F X ad D B parallela, ac D Y per punctum deſignatum D tranſiens, ut ſit ſemper ratio ipſius B E ad ipſam B F æqualis aſſignatæ D B ad R; erunt rectarum D Y, F X interſectiones ad lineam rectam.

Nam per N ducatur G K ad B A parallela; eſtque D B . D G :: B E . G N :: B E . B F :: B D . R. itaque ſemper eſt D G $=$ R. Patet igitur factâ D G $=$ R, & ductâ G K ad B A parallelâ, interſectiones omnes ad hanc exiſtere.

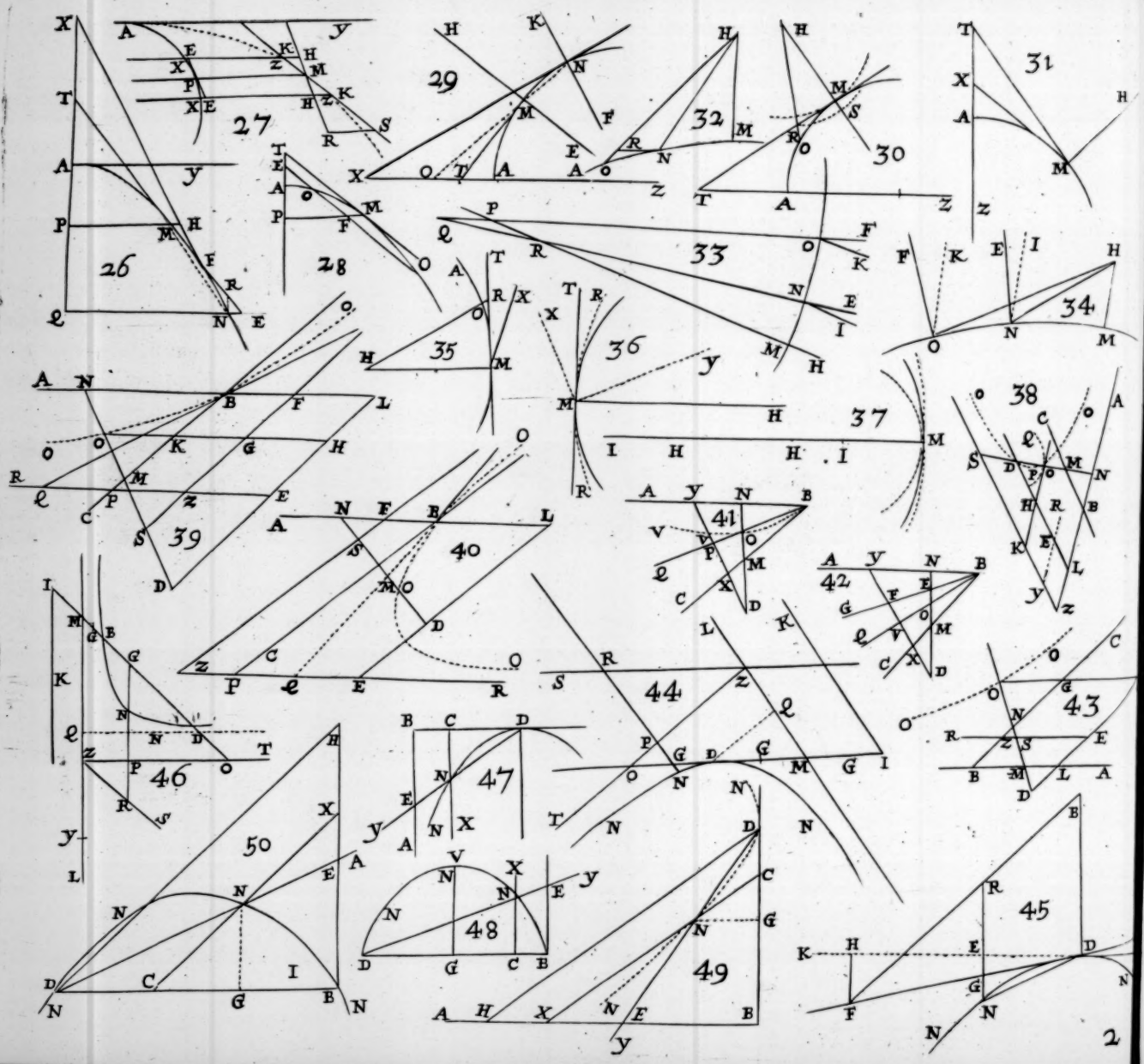
XX. Quòd ſi reliquis ſimiliter poſitis; ſumpto autem alio in B A puncto O; ab hoc ſumatur computandi initium; ut nimirùm ſit perpetuò B E, O F :: D B . R; erunt interſectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, ſit D B $= b$; O B $= g$; D G $=$

54.

TRINITY COLLEGE
LIBRARY
CAMBRIDGE

55.


27
29
31
32
30
26
28
33
34
35
36
37
38
41
42
39
40
46
47
44
43
50
48
49
45
2

$= x$; $GN = y$. ergò $BE = \frac{by}{x}$; & $OF = g + y$; ergò $\frac{by}{x}$. $g + y :: b . r$; hinc autem æquatio $ry - yx = gx$. unde DNN eſt *hyperbola* ſuprà mox determinata.

Quòd ſi punctum O ſumatur infra DB; fiet æquatio $yx - ry = gx$. unde rurſus conſtat.

XXI. Quinetiam, reliquis ſimiliter poſitis, recta FX non jàm ipſi DB, ſed alteri DH feratur parallela; ità ut aſſumpto in BA puncto habeat ſemper BE ad OF rationem aſſignatam (DB ad m) erunt interſectiones N itidem ad *hyperbolam*. Fig. 54.

Nam ducatur NG ad AB parallela; vocentúrque $DB = b$; $HB = f$; $HO = g$; $DG = x$; $GN = y$; eſt ergò $x . y :: b . \frac{by}{x} = BE$; & $b . f :: x . \frac{fx}{b} = GK$; quare $NK\,(FH) = y + \frac{fx}{b}$ & $OF = y + \frac{fx}{b} - g$. Eſt ergò $\frac{by}{x} . y + \frac{fx}{b} - g :: b . m$. unde reſultat æquatio $my + gx - yx = \frac{f}{b} xx$. vel facto $f . b :: m . r$; eſt $my + gx - yx = \frac{m}{r} xx$. Conſtat igitur lineam DNN eſſe *hyperbolam*; qualis ſuperiùs habetur determinata.

Notetur, ſi computatio ab ipſo puncto H. initium ſumat, (hoc eſt ſit BE. HF :: DB. m) evaneſcente tunc termino g; erit $my - yx = \frac{m}{r} xx$; unde quoque ſuprà habetur alia determinatio ſimplicior.

XXII. Eſto triangulum ADB, & linea DYY talis, ut ductâ utcunque PM ad DB parallelâ, ſit perpetuò $PY = \sqrt{PMq - DBq}$; erit linea DYY *hyperbola*; cujus utique Centrum eſt A, *ſemidiameter* AD, (vel *aſymptotos* AB) *ſemiparameter* autem P; faciendo AD. DB :: DB. P. Fig. 55.

Sit enim TD = 2 AD. Eſtque AD. P :: (ADq. DBq :: * 6. 2. *Elem.* APq. PMq :: * TP × DP + ADq. PMq :: TP × DP. PMq − DBq ::) TP × DP. PYq. vel TD. 2P; TP × DP. PYq. unde liquet Propoſitum.

Corol.

Corol. Si YS tangat *hyperbolam* DYY; erit PMq.PYq:: PA.PS.

Nam eſt PMq.DBq::PAq.ADq::PA.AS. ergò per rationis converſionem eſt PMq.PYq::PA.PS.

Fig. 56. XXIII. Quòd ſi reliquis ſimiliter poſitis; ſit jam PY = √PMq + DBq; erit etiam linea YYY *hyperbola*; cujus nempe Centrum A; *Semidiameter* AF (parallela & æqualis ipſi DB) *Semiparameter* autem P, ſi fiat AF.AD::AD.P.

Nam ducatur YK ipſi AP parallela cum AF conveniens in K; ſitque FT = 2FA; éſtque AF.P::(AFq.ADq:: DBq.ADq::PMq.APq::PYq—DBq.APq::AKq—AFq.KYq::) TK×FK.KYq::AF.P. unde conſtat Propoſitum.

Corol. Rurſus, Si recta YS *hyperbolam* FYY tangat, erit PMq.PYq::PA.PS.

Nam AD eſt *Semidiameter* ipſi AF conjugata. unde PA.AS:: PAq.ADq::PMq.DBq. ergò PA.PS::PMq.PMq + DBq::PMq.PYq.

Fig. 57. XXIV. Sit triangulum ADB, rectum habens angulum ADB; & curva CGD talis, ut ductâ quâcunque rectâ FEG ad DB parallelâ (quæ lineas expoſitas ſecet ut vides) ſit aggregatum quadratorum ex EF, EG æquale quadrato ex DB; erit curva CGD *Ellipſis* cujus ſemiaxes AD, AC.

Nam ſit AV = AD. Eſtque ADq.DBq (ACq):: AEq.EFq::ADq—AEq.DBq—EFq. Hoc eſt ADq.ACq:: VE×ED.EGq. unde liquet Propoſitum.

Nota, Tangat GT *ellipſin* CGD; eſt EFq.EGq::EA.ET.

Nam ob AE.AD::AD.AT. eſt AEq.ADq::AE.AT. unde AEq.ADq—AEq::AE.AT—AE. Hoc eſt EFq.DBq—EFq::AE.ET. hoc eſt EFq.EGq::AE.ET.

Fig. 58. Sit *Angulus rectilineus* DTH, in cujus latere TD ſignetur punctum A. Sit item curva VGG proprietate talis, ut ductâ rectâ quâpiam EFG ad TD perpendiculari (quæ lineas TD, TH, VGG ſecet punctis E, F, G,) connexáque rectâ AF, ſit EG = AF; erit linea VGG *hyperbola*.

Nam ducantur AP ad TH & VPC ad TD perpendiculares; item

item PO ad TE parallela. Eſtque EFq = EOq(CPq) + OFq + 2 EO × OF(+ 2 CP × OF). Verùm ob CP. CA :: OP. OF :: CE. OF; eſt CP × OF = CA × CE; ergo EFq = CPq + OFq + 2 CA × CE. item eſt AEq = CEq + CAq — 2 CA × CE; quapropter eſt EFq + AEq = CPq + CAq + OFq + CEq. hoc eſt EGq = (APq + PFq =) CVq + PFq. vel EGq — PFq = CVq. Verum eſt CE. (PO). PF :: CP. AP :: CP. CV; unde $EGq - \frac{CVq}{CPq} CEq$ = CVq; adeóque linea GVG eſt *hyperbola*, cujus centrum C; ſemiaxes CV, CP.

Not. Ductâ rectâ FQ ad TH perpendiculari, ſumptáque QR = AE; & connexâ GR; erit GR *hyperbolæ* VGG perpendicularis; mihi præſta sis fidem; aut ipſe rem ad Calculum exige; eò verba non profundam.

XXVI. Poſitione datæ ſint rectæ AC, BD (ſe interſecantes in X) quas decuſſet recta AB; tum ductâ utcunque rectâ PKL ad AB parallelâ, (quæ rectas AC, BD ſecet punctis P, K) ſit PL æqualis ipſi BK; erit linea ALL recta. Fig. 59.

Nam, (ductâ XQ ad BA parallelâ, eſt AQ. AP :: (BX. BK ::) QX. PL: ergo linea ALL eſt recta.

XXVII. Poſitione data ſit recta AX, & punctum D; neque non linea DNN talis; ut per D ductâ quâcunque rectâ MN (quæ rectam AX ſecet in M, & lineam DNN in N) ſit perpetim rectangulum ex DM, DN æquale dato (puta quadrato ex Z); erit linea DNN circularis. Fig. 60.

Nam ducatur DB ad AX perpendicularis; ſitque DB. Z :: Z. DE; & connectatur NE; Eſt jam DM × DN = Zq = DB × DE; quare DM. DB :: DE. DN. ergò triangula DBM, DNE ſimilia ſunt; quapropter angulus DNE rectus eſt; itaque linea DNN eſt circularis: (ad circulum pertinens, *cujus Diameter* DE).

Vides nedum rectam & *hyperbolam*; ſed & ſuo modo rectam ac *circulum* ſibi lineas eſſe reciprocas. Verùm hic, etſi præludiis noſtris nondum abſolutis, paulum ſubſiſtamus.

LECT. VII.

Lect. VII.

ADhuc in *Veſtibulo* hæremus; nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majus A; adſumpto tertio quopiam X, erit $A + X . B + X \sqsupset A . B$.

Nam ob $X . A \sqsupset X . B$; erit componendo $X + A . A . \sqsupset X + B . B$. vel permutando $X + A . X + B \sqsupset A . B$.

II. In linea YZ ſignentur tria puncta, L, M, N; & inter puncta L, N ſumpto puncto quopiam E, alteróque G extra LN (verſus Z);
Fig. 61. ſecetur EG in F, ut ſit $GE . EF :: NL . LM$; cadet punctum F ad partes MZ:

* 1 *hujus.* Nam eſt $NE . ME \ast \sqsubset NL . ML :: GE . FE \sqsubset NE . PE$. ergo $FE \sqsubset ME$.

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ; item rectæ BD, GP parallelæ;
Fig. 62. pérque punctum B ducantur utcunque duæ rectæ BT, BS ipſam GP ſecantes punctis L, K, dico fore $DS . DT :: KG . LG$.

Nam eſt $KG . LG = KG . GB + GB . LG = PK . PS + PT . PL = DB . DS + DT . DB = DT . DS$.

IV. Eſto triangulum BDT, baſíque DB parallelam quamvis PG interſecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ BS, BR punctis L, K; dico fore $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$.
Fig. 63. Sumantur enim $BM = GP$, & $BN = LP$; & $BO = KP$; unde conſtat junctas PM, PN, PO ipſis TB, SB, RB (reſpectivè) parallelas eſſe. Et quoniam eſt $DM . PD :: DB . TD$. erit $DM \times TD = PD \times DB$. Similiter eſt $DN \times SD = PD \times DB$. quare $DM \times TD = DN \times SD = DM \times SD + MN \times SD$, tranſponendóque $DM \times TD - DM \times SD = MN \times SD$. Simili planè diſcurſu

diſcurſu eſt $DM \times TD - DM \times RD = MO \times RD$. quapropter erit $MN \times SD . MO \times RD :: TD - SD . TD - RD$. hoc eſt $LG \times SD . KG \times RD :: TD - SD . TD - RD$; vel (ad æquationem redigendo) $LG \times SD \times TD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD - KG \times RD \times SD$; tranſponendóque $LG \times SD \times TD + KG \times RD \times SD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. hoc eſt $LG \times SD \times TD + KL \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. vel (ad analogiſmum reducendo) $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. Quod erat Propoſitum. Fig. 63.

V. Quòd ſi puncta T, R non ad eaſdem puncti D partes ſita ſint, erit $LG \times RD - KL \times TD . KG \times TD :: RD . SD$. Fig. 64.
Simili conſtabit id diſcurſu; quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium ſeries æquinumeræ (quales adſcriptas cernis) quarum cùm antecedentes primi, tum ultimi conſequentes inter ſe proportionales ſint ($A . \alpha :: M . \mu$; & $F . \varphi :: S . \sigma$) erunt ejuſdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter ſe proportionales (puta nempe, $D . \delta :: P . \pi$).

A. B. C. D. E. F.
α. β. γ. δ. ε. φ.
M. N. O. P. R. S.
μ. ν. ο. π. ρ. σ.

Sunt enim $A\mu$, $B\nu$, $C o$, $D\pi$, $E\rho$, $F\sigma$, & αM, βN, γO, δP, εR, φS, } Continuè proportionales.

Cùm igitur ſit $A\mu = \alpha M$; & $F\sigma = \varphi S$, liquidum eſt fore $D\pi = \sigma P$; ac idcircò $D . \delta :: P . \pi$. Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmeticam quàm Geometricam) æquè ſpectat hæc Concluſio.

VII. Rectæ AB, CD parallelæ ſint; hásque ſecet poſitione data BD; lineæ verò EBE, FBF ita relatæ ſint, ut ductâ utcunque recta PG ad DB parallelâ; ſit ſemper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum per quodvis deſignatum lineæ EBE punctum E tranſeat HE ipſis AB, CD parallela, ſitque alia curva KEK talis, ut ductâ utcunque QL itidem ad DB parallelâ, ſit QX Fig. 65.

eodem ſemper ordine media inter QL, QI (eodem inquam illo, quo
Fig. 65. PF media fuerat inter PG, PE): dico lineas FBF, KEK analogas eſſe; hoc eſt ordinatas (quales QR, QK) eandem perpetuò inter ſe rationem habere; eandem ſcilicet illi quam habet PF ad PE.

Hoc è Lemmate proximè præmiſſo conſectatur, uti patebit, ad ſubjectum Schema mentem advertendo.

QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.

Sunt ÷÷. unde QR. QK:: PF. PE.

Not. Pro lineis rectis AB, HE, CD ſubſtitui poſſent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66. VIII. Sint rurſus, in A concurrentes duæ rectæ AB, AD, rectaq; BD poſitione data; item duæ curvæ EBE, FBF ſic relatæ, ut ductâ utcunque PG ad DB parallelâ, ſit ſemper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum connexâ AE, ſit alia curva KEK talis, ut ductâ quâpiam rectâ QLI ad DB parallelâ ſit ſemper QK eodem ordine media inter QL, QI, quo fuit PF inter PG, PE; erit rurſus linea FEF ipſi KBK analoga; ſeu perpetim QR. QK:: PF. PE.

Nam QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.

ſunt ÷÷.

item QS. QL:: PG. PE.
Et QI. QI:: PE. PE.

ergò QR. QK:: PF. PE.

Not. Pro rectis AB, AH, AD ſubſtitui poſſent tres quævis lineæ analogæ.

Fig. 67. XI Item, ſit circulus AGB, cujus centrum D; aliæque duæ curvæ EBE, FBF tales, ut per D ductâ quâcunque rectâ DG, ſit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum centro D per E deſcribatur circulus HE; ſitque præterea curva KEK talis, ut ductâ per D quâpiam (ad circulum HE) rectâ DL, ſit ſemper DK

DK eodem ordine media inter DL, DI, quo fuerat DF inter DG, DE; erunt curvæ FBF, KBK analogæ, ſeu perpetuò DR. DK:: DF. DE.

Nam rurſus DS.*DR.*DI.
DL.*DK.*DI.
DG.*DF.*DE.
DE.*DE.*DE.
} ſunt ∴. unde DR. DK:: DF. DE.

Rurſus, pro circulis aliæ lineæ parallelæ, vel analogæ ſubſtitui poſſent.

X. Sint denuò duæ lineæ quævis AGBG, EBE; & altera FBF ſic ad iſtas relata, ut ductâ utcunque à deſignato puncto D recta DG, ſit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum adſumatur linea HEL lineæ AGB analoga (ſeu talis, ut per D utcunque ductâ DLS, ſint perpetuò DS, DL in eadem ratione) ſit denuò linea KEK talis, ut ductâ utcunque DL, ſit perpetuò DK eodem ordine media inter DL, DI, quo priùs DF inter DG, DE; erit itidem linea FBF lineæ KEK analoga.

Rurſus enim DS.*DR*DI.
DL.*DK*DI.
DG.*DF*DE.
DE.*DE*DE.
} ſunt ∴; } Et tam primi quàm ultimi quatuor termini ſunt proportionales. Unde liquet Propoſitum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua ſumptis quibuſcunque duobus terminis D, F; ſit terminorum à primo A (excluſivè) ad ipſum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem excluſivè) ad F, ſit numerus M; erit A —: D. A —: F:: N. M.

Nam eſto differentia communis, X. eſt ergò D = A ± NX. & F = A ± MX. quare A —: D = NX. & A —: F = MX. unde A —: D. A —: F :: (NX. MX ::) N. M.

XII. Hinc, ſi duæ fuerint ejuſmodi ſeries; & in utraque ſumantur

bini, eodem ordine ſibi reſpondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in ſecunda) erit A —: D. A —: F :: M —: P. M —: R.

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par eſt illi, quam habent ad ſe numeri N, M, quales in præcedente deſignati ſunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in ſerie quavis proportionalium; quales nos ſemper in ſequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint quælibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè; nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia; ſit autem illorum ſecundum B non majus horum ſecundo M; erit quodlibet in ſerie Geometrica majus eo, quod ipſi coordinatur in ſerie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M. N. O. P. Q.

Eſt enim A + N ⊏ 2 M (vel ⊏) 2 B = A + C. ergò N ⊏ C. unde M + N ⊏ B + C = A + D. Eſt autem A + O ⊏ M + N. ergò A + O ⊏ A + D. Et ideò O ⊏ D. ergò M + O ⊏ B + D = A + E. Eſt autem A + P ⊏ M + O. ergò A + P ⊏ A + E; adeóque P ⊏ E. ſimilique porrò diſcurſu quoad velis.

XIV. Hinc, ſi rurſus fuerint A, B, C, D, E, F ÷÷ Arithmeticè; & A, M, N, O, P, Q ſint ÷÷ Geometricè; ſitque ultimum F non minus ultimo Q; erit B majus quàm M.

Nam ſi dicatur B non majus quàm M; erit indè F minus, quàm Q contra hypotheſin.

Item, iiſdem poſitis; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam ſi F = Q; conſtat ex præcedente fore E ⊏ P (ſcilicet utramque ſeriem invertendo) ſin F ⊏ Q; potiori jure liquet fore E ⊏ P.

XVI. Quinimò demùm, iiſdem poſitis, quodlibet in ſerie Arithmetica majus eſt coordinato quolibet in ſerie Geometrica; puta, C majus eſt quàm N.

Eſt

Eſt enim E ⊏ P, ac indè D ⊏ O ; & hinc C ⊏ N.

XVII. Conſectatur hinc ; ſi fuerint quatuor lineæ HBH, GBG, FBF, EBE ſeſe interſecantes in B, ac ita verſus ſe relatæ, ut ductâ utcunque rectâ D H ad poſitione datam D B parallelâ (in linea nempe D D D terminatâ) vel à deſignato puncto D projectâ D H ; ſit perpetuò D G inter D H, D E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo D F inter eaſdem media Geometricè ; lineæ G B G, F B F ſeſe mutuò contingunt. Fig. 68. 69.

Enimverò linea G B H extra lineam F B F totam cadere manifeſtum è præcedente.

XVIII. Ex iſthinc etiam (quod ſtrictim tranſcurrens moneo) diverſis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ ἀσύμπτωτοι definiuntur. Sint nempe rectæ V D, B D poſitione datæ ; ſint item aliæ duæ rectæ A B, V I ; ductâ verò liberè rectâ P G ad D B parallela, ſit P φ conſtantèr inter P G, P E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo P F inter eaſdem media Geometricè ; quia jam (a) rectæ E G, E φ ſemper eandem obtinent rationem, eſt linea φ φ φ recta ; verùm linea V F F eſt *hyperbola*, vel *hyperboliformis* aliqua (communis quidem vel *Apolloniana hyperbola*, ſi P F ſit inter ejus P G, P E ſimpliciter media, ſed alia diverſi generis quædam *hyperboliformis*, ſi P F ſit alterius cujuſpiam ordinis media) atqui patet è penultima præmiſſa lineam φ φ φ eodem ordine reſpondenti lineæ V F F *aſymptoton* eſſe. quod an πάθος fit neſcio, nobis certè πάθος fuit, hic adnotâſſe. Fig. 70. (a) 12 hujus.

XIX. A puncto aſſignato B ad datam poſitione rectam A C ductæ ſint rectæ tres B A, B C, B Q ; tum in Q C producta ſumatur ſumptum quodpiam D ; per B recta (puta B R) duci poteſt (ad alterutras ipſius B Q partes) talis, ut à D projectâ quâcunque rectâ, ceu D N ; ſit hujus à rectis B Q, B R intercepta pars (F E) minor ejuſdem à rectis B A, B C interceptâ parte (N M). Fig. 71.

Nam, primò, ſi B R ultra angulum A B C jaceat reſpectu puncti D ; fiat Q R = C A ; & connectatur B R ; tum utcunque ducatur D E, rectas ſecans, ut vides ; & manifeſtum eſt, * è ſupra monſtratis fore, F E ⊐ N M. * Per 7. Lect. VI.

Sin B Q citra angulum A B C cadat verſus D ; (a) ducatur recta B H talis, ut à B Q, B H interceptæ minores ſint interceptis à B Q, B A ; & ſumatur H R = Q C ; & connectatur B R ; tum rurſus utcunque ductâ D N, quæ rectas interſecet, ut exhibet Schema ; quoniam * Per VI 8 L. &. Fig. 72.

niam jam est KF (b) ⊐ NF; & KE* ⊏ MF; perspicuum est restare FE ⊐ NM.

(b) Constr.

Ita quidem ab una rectæ BQ parte recta BR duci potest, quæ minores ipsis MN intercipiat; (a) potest autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipsis FE; unde totum liquet Propositum.

Fig. 73.

XX. In recta DZ sint tria puncta D, E, F; & in F sit vertex anguli rectilinei BFC, cujus latera secet recta DBC; per E verò ducta sit recta EG; potest ab E recta duci (ceu EH) talis, ut à puncto D projectâ utcunque rectâ DK sit in hac à rectis EG, EH intercepta minor à rectis FC, FB interceptâ.

Ducantur ES ad FC, & ER ad FB parallelæ; & in primo casu, ubi punctum E puncto D vicinius est, (ob similitudinem triangulorum ENM, FKI) manifestum est fore MN ⊐ IK; (a) potest autem ab E duci recta (puta EH) talis, ut interceptæ PO minores sint interceptis MN; ergò liquet.

(a) 19. hujus.

In altero casu, ubi punctum F ipsi D propius, sumatur SL æqualis ipsi CB; & connectatur EL; Estque jam IK. MN :: FK. EN :: DF. DE :: FC. ES :: BC. RS (c) :: LS. RS (d) ⊏ QN. MN. quapropter est IK ⊏ QN. (a) potest autem ab E recta duci, ceu EH, sic ut ab EG, EH interceptæ OP minores sint interceptis QN. quamobrem abundè constat Propositum.

Fig. 74.

(c) Constr.

(d) 6. Lect. VI.

XXI. Curvam BA tangat recta BO in B; sitque recta BO æqualis curvæ BA; sumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta KO; erit KO major arcu KA.

Fig. 75.

Nam, quoniam recta minimum est inter bina puncta intervallum, est BK + KO ⊏ BO = BK + KA. ergò KA ⊏ KO.

XXII. Hinc, utcunque sumptis (ad easdem contactûs partes) duobus punctis K, L, connexâque rectâ KL; erit KL + LO ⊏ KA.

Nam, supra contactum versus A, est KL + LO ⊏ KO ⊏ KA.

Infra verò, est KL + LB ⊏ KB (ex hypothesibus *Archimedæis*) adeóque KL + LO ⊏ KA.

LECT.

LECT. VIII.

MIhi ſanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat *ſapiens ille Scurra, perquam exiguæ Civitati portas ingentes extruxiſſe.* Nec enim adhuc aliud quàm ad rem aliquanto propius enitimur. ad illam.

I. Hæc adſumimus. Si duæ lineæ (O M O, T M T) ſeſe contingant, angulos ipſæ comprehendunt (O M T) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ: Si duæ lineæ (O M O. T M T) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ ſeſe contingent (contingentibus ſaltem æquipollebunt). Fig. 76, 77.

Hujus *effati* rationem jampridem (ni fallor) attigimus.

II. Hinc; Si duas lineas O M O, T M T tertia quæpiam linea P M P contingat, ipſæ etiam lineæ O M O, T M T ſeſe contingent.

Nam quoniam lineæ O M O, P M P ſeſe contingunt, erit angulus O M P quovis *rectilineo* minor. Item, ob linearum T M T, P M P *contractum*, erit *angulus* T M P quovis etiam *rectilineo* minor. Erit igitur angulus T M O *rectilineo* quovis minor. Unde lineæ O M O, T M T ſe mutuò contingent.

III. Tangat recta F A curvam F X in F; ſitque poſitione data recta F E; ſint item duæ curvæ E Y, E Z tales, ut ductâ utcunque rectâ I L ad E F parallelâ (quæ lineas expoſitas ſecet, ut vides) ſit ſemper intercepta K L æqualis interceptæ I G; etiam curvæ E Y, E Z ſeſe contingent. Fig 78.

Si non tangant, poteſt inter ipſas conſtitui angulus rectilineus, puta B E C; hunc utcunque ſecet ad F E parallela I L; ſumatúrque G H = B C, & connectatur F H; ſunt igitur è parallelis ad F E à rectis F G,

FG, FH interceptæ pares interceptis ab EB, EC; hoc eſt minores interceptis à curvis EY, EZ; hoc eſt minores interceptis à curva FX, & rectâ FA; quapropter angulus XFA rectilineo HFG major eſt; unde recta FA curvam FX non tangit, contra *Hypotheſin.*

Fig. 79. IV. Itidem, Tangat recta FA curvam FX, & ſint duæ curvæ EY, EZ tales, ut ab aſſignato puncto D utcunque ductâ rectâ IL (quæ lineas expoſitas ſecet ut vides) ſit ſemper KL = IG; curvæ EY, EZ ſeſe tangent.

(a) 10 Lect. VII. Nam, ſi neges, his interſeratur *angulus rectilineus* BEC; quem utcunque a D projecta ſecet recta DL; (a) poteſt jam ab F recta duci (puta FH) talis, ut ſint è projectis à D a rectis FG, FH interceptæ minores interceptis ab ipſis EB, EC, hoc eſt multo minores interceptis à recta EA, curvâque FX. Unde ſequetur angulum AFX rectilineo GFH majorem eſſe; ac idcirco rectam AF non contingere curvam FX, adverſus *Hypotheſin.*

Hæ præcedentes duæ Concluſiones veræ ſunt, & ſimili ratione demonſtrantur, poſito interceptas IG, KL quamvis ad ſe perpetim habere proportionem eandem. Parco verbis.

Propoſuimus hæc, ut ſequentium nonnulla à ſcrupulis muniantur.

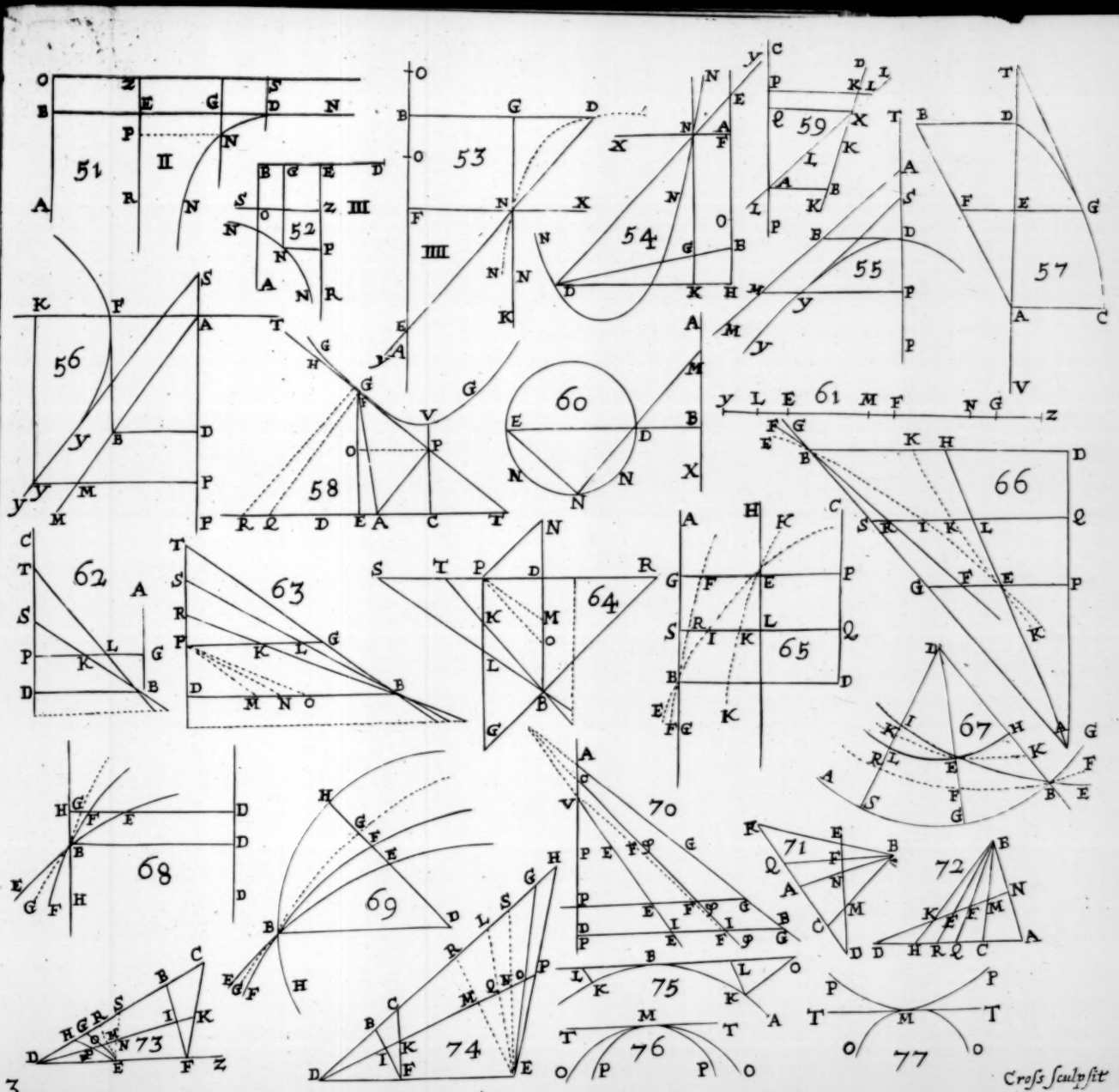
V. Sit recta VEI, duæque curvæ YFN, ZGO ſic ad ſe relatæ, ut ductâ utcunque rectâ EFG ad poſitione datam AB parallelâ, habeant interceptæ EG, EF ſemper eandem rationem inter ſe; tangat autem recta TG curvarum unam ZGO in G (cum recta VE conveniens in T) ducta TF alteram YFN quoque continget.

(a) *Hyp.* Nam utcunque ducatur recta IL (lineas expoſitas ut vides interſecans) Eſt igitur IL. IN (a) ⊏ IO. IN :: EG. EF :: IL. IK. Igitur IN ⊐ IK. ergò punctum K extra curvam YFN jacet; totáq; recta TF.

(b) *Hyp.* (c) *Schol. 4. hujus.* Aliter. Eſt IL. IK :: (IO. IN :: IK — IO. IK — IN ::) OL. NK, ergò cùm lineæ GL, GO ſe (b) tangant, (c) etiam lineæ FN, FK ſeſe tangent.

Fig. 80. VI. Etiam ſi tres curvæ XEM, YFN, ZGO ità referantur ad ſe, ut ductâ utcunque rectâ EFG ad poſitione datam parallelâ, ſint ſemper EG, EF in eadem ratione, concurrant autem duarum XEM, ZGO tangentes ET, GT in T; adjuncta TF curvam YFN tanget.

Nam



Cross sculpsit

TRINITY COLLEGE
LIBRARY
CAMBRIDGE

Nam (facto ut priùs) erit I L . I K : : E G . E F : : M O . M N. * quapropter erit punctum K extra curvam Y F N. * 2. Lect. VII.

Possit hæc, ut præcedens, aliter ostendi; sed verbis pluribus.

Curvas ità sitas concipe quales figura monstrat. nam στενολεχίαν ego ac ἀδολεχίαν fugitans casus præ cæteris obvios ac faciles arripiens propono. Hoc ubique subnotatum velim.

VII. Sit punctum datum D, curvæque duæ X E M, Y F N, ità relatæ, ut à D projectâ quacunque rectâ D E F, habeant ad se rectæ D E, D F rationem semper eandem; unam verò Y F N tangat recta F S; cui parallela sit E R; tanget recta E R curvam X E M. Fig. 81.

Nam à D utcunque projiciatur recta D K (lineas intersecans, ut vides). Estque D K . D I : : D F . D E : : D N . D M; ergò quum sit D K ⊏ D N; erit D I ⊏ D M; quare tota recta R E extra curvam X E M cadit.

Rectæ N K, M I rationem semper eandem obtinent; unde res aliter constat.

VIII. Sint tres curvæ X E M, Y F N, Z G O tales, ut si ab assignato puncto D projiciatur utcunque recta DEFG, habeant interceptæ E G, E F rationem semper eandem (puta quam R ad S) tangant autem rectæ E T, G T curvarum duas (puta X E M, Z G O) in E, G; oportet curvæ Y F N tangentem ad F designare. Fig. 82.

Concipiatur curva T F V talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D M K L, (quæ secet rectas T E, T G punctis I, L, & istam curvam in K) habeant semper interceptæ I L, I K rationem eandem datæ R ad S; (*a*) est igitur I K ⊏ I N; quare curva T F K curvam Y F N tangit: (*b*) est antem curva T F K *hyperbola*; hanc tangat F S; (*c*) illa quoque curvam Y F N tanget.

(*a*) 2 Lect. VIII.
(*b*) 4 Lect. VI.
(*c*) 2. *hujus*

Quoniam *hyperbolam* tangentis hîc primum injecta est mentio; hujus (unà cum aliarum omnium consimili ratione procreatarum seu *reciprocarum linearum tangentibus*) *tangentem* ità definiemus.

IX. Sint V D recta linea, duæque curvæ X E M, Y F N ità relatæ, ut ductâ liberè rectâ E D F ad positione datam parallelâ, sit semper *rectangulum* ex D E, D F par eidem alicui spatio; tangat autem recta E T curvam X E M in E, cum recta V D concurrens in T; sumatúrque D S = D T; & connectatur F S; hæc curvam Y F N tanget ad F. Fig. 83.

Nam utcunque ducatur I N ad E F parallela; lineas expositas se-

cans, ut vides. Eſtque TP. PM ⊏ (TP. PI::) TD. DE item SP. PK:: SD. DF. ergò TP×SP. PM×PK ⊏ TD×SD. DE×DF:: TD×SD. PM×PN. Verum TD×SD ⊏ TP×SP; ac indè magis TD×SD. PM×PK ⊏ TD×SD. PM×PN. quare PM×PK ⊐ PM×PN; vel PK ⊐ PN. Itaque recta FS extra curvam YFN tota jacet.

Not. Si linea XEM recta fuerit (utique ipſi TEI coincidens) erit YFN *hyperbola* vulgaris, cujus centrum T, *aſymptotos* una TS, altera TZ, ad EF parallela.

X. Quinetiam ſit punctum D; curvæque duæ XEM, YFN ità relatæ, ut per D ductâ quacunque rectâ EF; ſit perpetuò rectangulum ex DE, DF æquale cuidam quadrato (ex Z puta); unam verò curvam XEM tangat recta ER; alterius ad F tangens ità determinatur: Ducatur DP ad ER perpendicularis: factóque DP. Z:: Z. DB; biſecetur DB in C; connexâque CF, ducatur FS ad CF normalis; hæc curvam YFN tanget.

Fig. 84.

Nam centro C per F deſcribatur *Circulus* DOB; & per B trajiciatur utcunque recta IN lineas interſecans, ut vides; eſtque DO×DI (*a*) = DP×DB (*b*) = Zq (*c*) = DM×DN vel DO. DM :: DN. DI. ergò quum ſit DM (*c*) ⊐ DI; erit DO ⊐ DN; itaque circulus DOB curvam YFN tanget. Quare recta FS eandem YFN tanget.

(*a*) 27 Lect. VI.
(*b*) *Conſtr.*
(*c*) *Hyp.*

XI. Curvæ XEM, YFN tales ſint, ut ductâ quâpiam FE ad poſitione datam parallelâ, ſit ſemper hæc æqualis eidem alicui; curvam autem YFN tangat recta SF; huic parallela RE alteram XEM continget.

Fig. 85.

Nam utcunque ductâ MK ad FE parallelâ eſt NI ⊐ (KI = FE =) NM. Quare punctum I extra curvam XEM jacet, *&c.*

Reverà linea XEM nil aliud eſt, quàm ipſa YFN *tranſlocata.* Levius hoc, & methodi tantùm gratiâ Propoſitum.

XII. Sit curva quæpiam XEM, quam tangat recta ER ad E; ſit item alia curva YFN ad alteram ità relata, ut ab aſſignato puncto D utcunque ductâ rectâ DEF, ſit ſemper intercepta EF æqualis alicui determinatæ Z; curvæ YFN tangens (ad F) ità deſignatur: Sumatur DH = Z; & per H ducatur AH ad DH perpendicularis, ipſi ER occurrens in B, & per F ducatur FG ad AB parallela; ſumatúrque GL = GB; erit connexa LFS curvæ YFN tangens.

Fig. 86.

Nam

Nam *asymptotis* E R, A B per F descripta concipiatur *hyperbola* O F O; cui occurrat à D projecta quæpiam D O, lineas expositas secans, uti cernis. Estque Q O (*a*) = D P; (*b*) quare M O ⊏ D P (*c*) ⊏ D H (*b*) = M N. ergo *hyperbola* O F O curvam Y F N tanget. (*a*) *Convers.* 9. Lect. VI. (*b*) *Hyp.* (*c*) *Lem.*

Verùm (*d*) recta L S *hyperbolam* O F O tangit; hæc itaque curvam Y F N quoque tanget. (*d*) 9. *hujus.*

Not. Si X E M ponatur linea recta (vel ipsi E R coincidat) erit Y F N *Conchois* prima vulgaris, seu *Nicomedea*; hujus igitur tangens è generali ratione quâdam habetur determinata.

XIII. Sit recta L A, curváque quæpiam B E I; cum alia curva D F G talis, ut ductâ liberè rectâ P F E ad positione datâm quandam parallelâ, possit recta P E quadratum ex P F unà cum quadrato ex datâ Z; item curvam B E I tangat recta E T; tum fiat P E q. P F q :: P T. P S; connexa S F curvam D F G tanget. Fig. 87.

Nam concipiatur curva V F H talis, ut liberè ductâ Q K ad P E parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit perpetuò Q K q = Q H q + Z q; unde quoniam est Q K (*a*) ⊏ Q I; erit Q K q — Z q ⊏ Q I q — Z q; hoc est Q H q ⊏ Q G q; ergo curva V F H curvam D F G tanget ad F; (*b*) est autem curva V F H *hyperbola*, quam (*c*) tangit recta S F. hæc itaque curvam D F G quoque continget. (*a*) *Hyp.* (*b*) 22. *Lect.* 6. (*c*) *Cor.* 22. Lect. I.

XIV. Cætera ponantur eadem; at jam P E unà cum quadrato ex data Z possit quadratum ex P F; fiatque P E q. P F q :: P T. P S; & connectatur F S; hæc rursus ipsam G F G continget. Fig. 88.

Similis est demonstratio; sed adhibe 23^am^ primæ Lectionis.

XV. Sint curvæ duæ A F B, C G D, communem habentes *axem* A D, ac ità versus se relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ F E G ad A D perpendiculari (quæ rectas expositas secet ut vides) sit summa quadratorum ex ipsis E F, E G æqualis quadrato ex determinata recta Z; tangat autem recta F R ex his curvis unam A F B; & fiat E F q. E G q :: E R. E T; connexa G T curvam C G D quoque tanget. Fig. 89.

Concipiatur enim curva O G O talis, ut ductâ rectâ K Q O (quæ rectas F R, E R secet punctis K, Q, curvam O G O in O) sit Q K q + Q O = Z q, erit ideò Q K q + Q O q = Q I q + Q L q; & cum sit Q K q (*a*) ⊏ Q I q, erit ideò Q O q ⊐ Q L q. itaque curva O G O curvam C G D (inrorsum) tangit. (*b*) Est autem (ex (*a*) *Hyp.* (*b*) 24. Lect. VI.

oſtenſis) curva O G O *Ellipſis*, quam recta G T tangit. ergò recta G T curvam C G D quoque tanget.

Fig. 90. XVI Sit curva quæpiam A F B (cujus axis A D, & ad hunc applicata D B) ſit etiam alia curva V G C ad iſtam ſic relata, ut à deſignato quodam in axe A D puncto Z ad curvam A F B utcunque ductâ rectâ Z F, & per F ductâ rectâ E F G ad D B C parallelâ, ſit E G æqualis ipſi Z F; ſit autem P Q perpendicularis curvæ A F B; ſumatúrque Q R æqualis ipſi Z E; connexa recta G R ipſi curvæ V G C perpendicularis erit.

Nam ducatur F T ad ipſam F Q perpendicularis, ſeu curvam A F B tangens; & concipiatur curva O G O talis, ut ductâ quâcunq; rectâ H K O ad E F G parallelâ (quæ rectas T E, T F, & curvam O G Θ ſecet punctis H, K, O) connexâque Z K, ſit H O = Z K; tum ductâ Z I quoniam H K (*a*) ⊏ H I, erit Z K ⊏ Z I, vel H O ⊏ H L; quare curva O G O curvam V G C tangit. (*b*) Eſt autem O G O (ex oſtenſis) *Hyperbola*, cui perpendicularis eſt recta G R; eadem itaque G R curvæ V G C quoque perpendicularis erit: Quod E. D.

(*a*) *Hyp.*
(*b*) 25 Lect. VI

Fig. 91. XVII. Sint recta D Q, duæque curvæ D R S, D Y X ità relatæ, ut ductâ utcunque rectâ R E Y ad poſitione datam D B parallelâ (quæ dictas lineas ſecet, ut perſpicis) connexâque rectâ D Y, ſit ſemper R Y. D Y :: D Y. E Y; tangat autem recta R F curvam D R S ad R; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam deſignare.

Concipiatur linea D Y O talis, ut ductâ utcunque G O ad D B parallelâ (quæ lineas F R, F P, D Y O ſecet punctis G, P, O) connexâque D O ſit ſemper G O. D O :: D O. P O; tanget curva D Y O curvam D Y X ad Y; Nam ſecet recta G O curvas D R S, D Y X punctis S, X; & connectantur rectæ D G, D S, D X; patet (è curvarum natura) angulos X D P, D S P; nec non angulos O D P, D G P æquari; quare cùm angulus D S P major ſit angulo D G P; erit angulus X D P angulo O D P major, adeóque P X major erit quàm P O; hinc curva D Y O curvam D Y X tanget ad Y; eſt autem curva D Y O *hyperbola* (*a*) ſuperiùs determinata; hanc tangat Y S; hæc igitur curvam D Y X quoque tanget.

(*a*) 32 Lect. VI.

Not. Si curva D R S ſit circulus, & angulus Q D B rectus, erit curva D Y X *ciſſois* vulgaris; hujus itaque (cum innumeris aliis ſimiliter genitis) tangens hic definitur.

Fig. 92. XVIII. Poſitione datæ ſint rectæ D B, B K; ſitque curva D Y X talis;

talis; ut à puncto D ductâ quâvis rectâ D Y H (quæ rectam B K secet in H, curvam D Y X in Y) sit perpetuò subtensa D Y æqualis rectæ B H; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam determinare.

Centro D per B ducatur circulus B R S; cui occurrat recta Y E R ad B K parallela; & connectatur D R; estque (propter ang. D Y E = ang. D H B; & D Y = B H, ac D R = D B) triangulum R D Y triangulo D B H simile ac æquale; quare R Y . Y D :: (D H . H B) :: Y D . Y E. unde ex præcedente determinabilis est recta curvam D Y X tangens in Y.

XIX. Sint itidem rectæ D B, B K positione datæ; nec non curva B X X talis, ut à puncto D projectâ quâcunque rectâ D X (quæ rectam B K secet in H, curvámque B X X in X) sit perpetuò H X ipsi B H æqualis; designetur oportet recta curvam B M X tangens in X. Fig. 93.

Concipiatur curva D Y Y talis, ut perpetuò sit D Y = B H (talis nempe, qualem attigimus in præcedente) hanc verò tangat recta Y T in Y, ipsi B K occurrens in R; tum *asymptotis* R B, R T per X descripta censeatur *hyperbola* N X N; ad quam utcunque projiciatur recta D N (lineas expositas secans, ut vides) Estque jam O M (*a*) = D I) ⊐ (*a*) (D L (*b*) =) O N; ergò *hyperbola* N X N curvam B X X tangit ad X. Ducatur itaque recta X S *hyperbolam* N X N contingens, hæc ipsam curvam B X X quoque continget.

(*a*) *Constr.* (*b*) *Convers.* 9. Lect. VI

Cæterùm satis pro hac vice nugati videmur; cessemus aliquantisper.

LECT. IX.

LECT. IX.

QUod ingreſſi ſumus iter actutùm rectà proſequemur.

I. Sint rectæ A B, V D ſibi parallelæ; quas ſecat poſitione data D B; tranſeant verò per B lineæ E B E, F B F ità ad ſe relatæ, ut ductâ quâvis P G ad D B parallelâ, ſit perpetuò P F inter P G, P E eodem ordine deſignato media *Arithmeticè*; tangat autem recta B S curvam E B E; oportet lineæ F B F tangentem (ad B) deſignare.

Fig. 94.

Sint Numeri N, M proportionalium P F, P E (quales (*a*) explicuimus ſupra) exponentes; fiátque N. M :: D S. D T; connectatúrque T B; hæc lineam F B F continget.

(*a*) 12. Lect. VII.

Nam utcúnque ducta ſit recta P G, dictas lineas ſecans, utì cernis: Eſtque F G. E G (*b*) :: N. M :: (*c*) D S. D T :: (*d*) L G. K G; cùm ergò (*e*) ſit K G ⊐ E G; erit L G ⊐ F G; unde liquet rectam T B extra curvam F B F totam conſiſtere.

(*b*) 11. Lect. VII.
(*c*) *Conſtr.*
(*d*) 3. Lect. 7.
(*e*) *Hyp.*

II. Reliquis perſtantibus iiſdem, ſit jam P F inter P G, P E media proportionalis Geometricè (eodem ordine media nempe, quo fuit priùs Arithmeticè) eadem B T curvam F B F continget.

Etenim è mediis Arithmeticè Geometricéque proportionalibus hocce modo conſtructæ lineæ ſeſe mutuò (*a*) contingunt ad B; ergò cùm recta B T tangat unam, hæc alteram quoque continget.

(*a*) 17. Lect. 7.

Exemplum. Sit P F inter P G, P E è ſex mediis tertia; erit ergò M = 7; & N = 3; adeóque D S. D T :: 3. 7.

III. Manente porrò quoad cætera proximè præcedente hypotheſi, ſumptóque quovis in curva F B F puncto F; etiam ad hoc punctum tangens recta ſimili pacto deſignatur.

Fig. 95.

Nempe per F ducatur recta P G ad ipſam D B parallela, ſecans curvam E X E in E, tum E X tangat curvam E B E in E; fiátque N. M ::

M : : PX . PY ; connectatúrque recta FY ; hæc curvam FBF continget.

Nam per E ducatur recta CE ad AB (vel VD) parallela ; concipiatúrque per E tranſiens curva HEH talis, ut ductâ quâpiam QI ad DE parallelâ (curvas EBE, HEH in L, & H ; rectaſque CE, VP in I ac Q ſecante) ſit ſemper QH inter QI, QL eodem ordine media, quo PF inter PG, PE ; è præcedente jam conſtat rectam connexam EY curvam HEH contingere ; verùm curvæ HEH (*a*) analoga eſt curva FBF ; (*b*) ergò recta FY curvam FBF quoque continget.

a 7. Lect. 7.
b 5. Lect. 8.

IV. Adnotetur, poſito lineam EBE rectam eſſe, quòd linea FBF parabolarum ſeu paraboliformium aliqua ſit, quare quod de his paſſim obſervatum habetur (ex calculo deductum, & inductione quâdam comprobatum, neſcio tamen an uſpiam Geometricè oſtenſum) ex immensùm uberiore fonte manat, ad innumeras aliorum generum curvas ſe diffundente.

V. Hinc apertè conſectatur ; ſi TD ſit recta, ſintque duæ quædam curvæ EEE, FFF ità ad ſe relatæ, ut ductis rectis PEF ad poſitione datam BD parallelis, ſint ordinatæ PE ſemper ut quadrata ex ordinatis PF ; rectæ verò ES, FT (ex ejuſdem communis ordinatæ terminatis ductæ) curvas haſce contingant ; erit TP = 2 SP ; Quod ſi ordinatæ PE ſe habeant ut ipſarum PF cubi, erit TP = 3 SP ; ſi PE ſint ut quadrato quadrata ipſarum PF, erit TP = 4 SP ; ac ſic eodem ad infinitum continuo tenore. Fig. 96.

VI. Sit porrò Circulus ABC, cujus Centrum D, radius DB, item lineæ EBE, FBF per B tranſeuntes, ac ità relatæ, ut ductâ per D rectâ quâpiam DG, ſit ſemper DF eodem ordine media Arithmeticè inter DG, DE ; tangat autem recta BO curvam EBE in B ; oportet curvæ FBF tangentem (ad B) deſignare. Fig. 97.

Hoc (certè (*a*) generatim quadantenus præſtitum) è re fuerit hic ſpeciatim apertiùs atque plenius exequi : Quorſum ſit DQ ad DB perpendicularis, quam ſecet BO in S ; fiat verò N . M : : DS . DT ; connectatúrque recta TB ; hæc curvam FBF tanget.

a 8. Lect. 8.

Tangat enim recta PB *circulum* ABG ; ſecentúrque rectæ DS in X, & BS in Y, ità ut ſit DS . DX : : M . N : : BS . BY ; perque puncta X, Y ducantur XZ ad BS, & YV ad DS parallelæ, concurrentes in C ; tum *aſymptotis* YCZ per B traducta concipiatur *hyperbola* LBL ; porrò ex D projiciatur utcunque recta DP diſtas lineas Fig. 97.

inter-

interſecans, ut expreſſum vides; eſtque jam PK. PL :: (a) M. N :: (b) GE. GF (c) ⊏ PE. PF ⊏ PK. PF; quare PL ⊐ PF; igitur *Hyperbola* LBL curvam FBF tangit. Protracta jam TB cum XZ conveniat in R; eſtque tum RZ. ZB :: BS. ST. unde RZ × ST = BS × ZB = BS × SX. atqui propter DS. SX :: (d) BS. SY, eſt DS × SY = BS × SX. ergò RZ × ST = DS × SY = DS × CX. vel RZ. CX :: DS. ST; compoſitéque RZ · RZ + CX :: DS. DT :: (d) N. M :: CZ. CZ + CX. itaque diviſim eſt RZ. CX :: CZ. CX. adeóque RZ = CZ; unde RB *hyperbolam* LBL tangit; hæc igitur (RBT) curvam FBF, ipſi LBL contiguam, quoque tanget. quod erat Propoſitum.

a Converſ. 4. Lect. VI.
b 11. Lect. VII.
c 1. Lect. VII.
d Conſtr.

VII. Hinc ſi perſiſtentibus reliquis, recta tantùm DF jam inter DG, DE perpetuò Geometricè media ſtatuatur (eodem qui priùs fuit ordine) eadem BT curvam FBF quoque continget.

Etenim ex mediis ejuſdem ordinis *Arithmeticè Geometricéque* proportionalibus effformatæ lineæ ſe mutuò contingunt, adeóque communi rectâ tangente gaudent.

Fig. 98.

VIII. Porrò (ſtantibus reliquis ut in poſtremâ) quodvis in curva FBF deſignetur punctum F, quæ curvam ad hoc tanget recta ſimili pacto determinatur.

Connectatur utique recta DF curvam EBE ſecans ad E; item ducatur DQ ad DG perpendicularis ipſam EO interſecans ad X; fiat etiam DX. DY :: N. M; & connectatur EY; ipſi demùm EY parallela ducatur FZ; hæc curvam FBF continget.

Nam centro D per E ducatur circulus CEI; concipiatúrque linea HEH talis, ut à D eductâ quacunque rectâ DI (quæ circulum CE ſecet in I, curvam HEH in H, & ipſam EBE in L) ſit perpetuo DH eodem inter DI, DL ordine proportionalis, quo DF inter DG, DE; palam eſt tunc (è præcedente) quòd recta EY curvam HEH tanget; verùm ipſi HEH (a) analoga eſt curva FBF; (b) quare recta FZ curvam FBF quoque tanget.

a 9. Lect. VII.
b 7. Lect. VIII.

Exhinc nedum innumerarum ſpiralium; at aliarum diverſi generis infinities plurium tangentes quàm promptè determinantur.

Fig. 99.

IX. Hinc clarum eſt, ſi duæ lineæ EEE, FEF ſic ad ſe referantur, ut à puncto quodam D utcunque projectis rectis DEF; habeant ſe rectæ DE, ut quadrata ex ipſis DF, & ad harum terminos tangant curvas rectæ ES, FT; cum perpendicularibus ad ipſas

DEF

DEF concurrentes punctis S, T; erit ſemper DT = 2 DS. Quòd ſi DE ſunt ut cubi ipſarum DF, erit ſemper DT = 3 DS; ac ſimili deinceps modo. Fig. 99.

X. Sint rectæ VD, TB concurrentes in T, quas decuſſet poſitione data recta DB; tranſeant etiam per B lineæ EBE, FBF tales, ut ductâ quâcunque PG ad DB parallelâ, ſit perpetuò PF eodem ordine media Arithmeticè inter PG, PE; tangat autem BR curvam EBE; oportet lineæ FBF tangentem ad B determinare. Fig. 100.

Sumptis NM (ordinum in quibus ſunt PF, PE exponentibus) fiat $N \times TD \overset{+M}{-N} \times RD . M \times TD :: RD . SD$; & connectatur BS; hæc curvam FBF continget.

Nam utcunque ducta ſit PG, dictas lineas ſecans ut vides. Eſtque EG. FG :: (a) M. N. ergò FG × TD. EG × TD :: N × TD. M × TD. Item EF × RD. EG × TD :: M — N × RD. M × TD. Quapropter (antecedentes conjungendo) erit FG × TD + EF × RD. EG × TD :: N × TD + M — N × RD. M × TD, (hoc eſt) :: (b) RD. SD. (c) Eſt autem LG × TD + KL × RD. KG × TD :: RD. SD. quare FG × TD + EF × RD. EG × TD. LG × TD + KL × RD. KG × TD. hinc, cùm ſit EG (d) ⊏ KG; erit FG × TD + EF × RD ⊏ LG × TD + KL × RD; vel FG. EF + TD. RD ⊏ LG. KL + TD. RD; ſeu (demptâ communi ratione) FG. EF ⊏ LG. KL. vel componendo EG. EF ⊏ KG. KL (e) ⊏ EG. EL. unde eſt EF ⊐ EL. itaque punctum L extra curvam FBF ſitum eſt; adeoque liquet Propoſitum.

(a) 11. Lect. VII.
(b) Conſtr.
(c) 4. Lect. VII.
(d) Hyp.
(e) 1. Lect. VII.

XI. Quinetiam, reliquis ſtantibus iiſdem, ſi PF ſupponatur ejuſdem ordinis Geometricè media liquet (planè ſicut in modò præcedentibus) eandem BS curvam FBF contingere.

Exemplum. Si PF ſit è ſex mediis tertia, ſeu M = 7; & N = 3; erit 3 TD + 4 RD. 7 MD :: RD. SD; vel $SD = \frac{7MD \times RD}{3TD + 4RD.}$

XII. Patet etiam, accepto quolibet in curva FBF puncto (ceu F) rectam ad hoc tangentem conſimili pacto deſignari. Nempe per F ducatur recta PG ad DB parallela, ſecans curvam EBE ad E; & per E ducatur ER curvam EBE tangens; fiátque $N \times TP \overset{+M}{-N} \times RP$. Fig. 101.

M × T P :: R P . S P ; & connectatur S F ; hæc curvam F B F tanget ; id quod omnino ſimili diſcurſu demonſtratur, quo tertia hujus ; tantùm hìc (non per E ad V D parallela ducitur, at) connectitur E T ; & loco ſeptimæ allegatur octava ſeptimæ Lectionis. quid plura ?

XIII. Adnotetur, ſi linea E B E ſit recta, (rectæ nempe B R coincidens) eſſe lineam F B F ex *infinitis hyperbolis* (vel *hyperboliformibus*) aliquam ; quarum igitur (unà cùm aliarum infinities diverſi generis plurium) *Tangentes* determinandi modum uno *Theoremate* complexi ſumus.

XIV. Quòd ſi puncta T, R non ad eaſdem partes puncti D (vel P) cadant ; curvæ F B F tangens (B S) deſignatur faciendo N × R D —: Fig. 102.

$$\left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times T D . M \times T D :: R D . S D .$$

Simili planè diſcurſu conſtat hoc, tantùm (quartæ loco) ſeptimæ Lectionis quintam adhibendo.

XV. Hinc autem nedum *Ellipſoidum* omnium (poſito nempe lineam E B E rectam eſſe, lineæ B R coincidentem) aſt aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unâ operâ determinantur.

Exemplum. Si P F ſit è quatuor mediis quarta, ſeu M = 5 ; & N = 4 ; erit $S D = \frac{5 T D \times R D}{4 R D - T D}$.

Notetur ; Si contigerit eſſe $N D \times R D = \left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times T D$, eſſe D S infinitam ; ſeu B S ipſi V D parallelam. Alia poſſent adnotari ; ſed relinquo.

XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hâc methodo *Ciſſois & Ciſſoidalium* omne genus comprehenditur : Sit utique ſemirectus angulus D S B ; curvæque duæ S G B, S E E ſic ad ſe referantur, ut ductâ liberè rectâ G E ad B D parallelâ, (quæ lineas expoſitas, ut conſpicis, ſecet) ſint P G, P F, P E continuè proportionales ; tangat autem recta G T curvam S G B in G, reperietur quæ ad E lineam S E B tangit, faciendo 2 T P — S P . T P :: S P . R P ; utique connexa R E curvam S E E tanget. Id quod è præmiſſis facilè colligitur. Quòd ſi jam curva S G B ſit circulus, & applicationis angulus S P G Fig. 103.

ſit

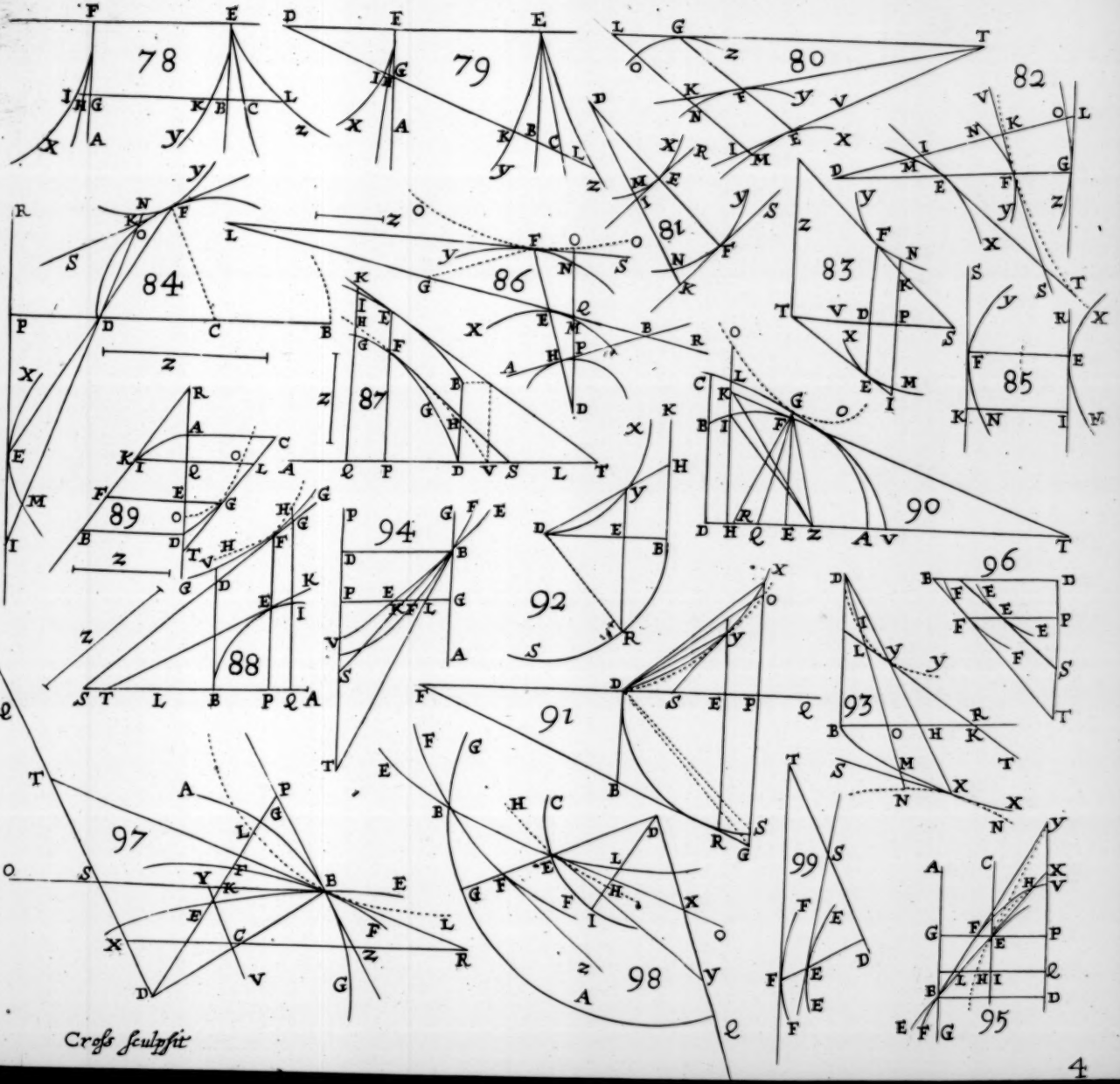

78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
Cross sculpsit

Fig.

Fig.

ſit rectus, erit curva S E E *Ciſſois vulgaris*, ſeu *Dioclea*; alioquin alterius generis *Ciſſoidalis*. Hoc autem ἐν παρόδῳ perſtringo. Neq; jam ampliùs vos detinebo.

LECT. X.

INſtitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam A E G, nec non alia A F I ſic ad illam relata, ut ductâ quâcunque E F ad poſitione datam A B parallelâ (quæ curvam A E G ſecet in E, curvámque A F I in F (ſit perpetim E F æqualis curvæ A E G ab A intercepto arcui A E; tangat autem recta E T curvam A E G in E, ſitque E T æqualis arcui A E, & connectatur recta T F; hæc curvam A F I tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta G K ad A B parallela, lineas propoſitas ſecans, ut cernis; éſtque G K = G H + H K = G H + H T (a) ⌐ arc. A G = G I; unde punctum K extra curvam A F I ſitum eſt; adeóque recta T K ipſam tangit. (a) 22 Lect. VII.

II. Quòd ſi recta E F quamlibet ad arcum A E rationem ſemper eandem habeat, nihilo ſecius recta F T curvam A F I tanget; ut ex hac, & octavæ Lectionis ſexta manifeſtæ conſectatur.

Hæc antea pridem aliter oſtendimus; aſt hæc demonſtratio ſimplicior aliquanto videtur, & clarior; methodóque quam inſinuamus accommodatior.

III. Sit *curva* quæpiam A G E, punctúmque deſignatum D; ſit item alia curva A I F talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque D E F, ſit ſemper intercepta E F par arcui A E; tangátque recta E T curvam A G E; oportet curvæ A I F *Tangentem* (ad F) deſignare. Fig. 105.

Fiat T E = arc. A E; ſitque curva T K F talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ D K (quæ curvam T K F ſecet in K, rectámque T E in H)

ſit ſemper HK = HT; tum curvam TKF (a) tangat recta FS in F; hæc curvam AIF quoque continget.

(a) 17. Lect. VIII.

(a) 22. Lect. VII.

Eſt enim GK = GH + HK = GH + HT (a) GA = GI. quare punctum K extra curvam AIF jacet; adeóque recta FS curvam AIF continget.

IV. Quòd ſi recta EF ad arcum AE eandem aliquamcunque ſtatuatur habere proportionem, tangens ejus facilè determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

Fig. 106.

V. Sint recta AP, duæque *curvæ* AEG, AFI, ità ad ſe relatæ ut ductâ utcunque rectâ DEF (quæ rectam AP, curvas AEG, AFI punctis D, E, F, ſecet) ſit ſemper recta DT æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG ad E; ſumatúrque ET par arcui EA; & ſit TR ad BA parallela; connectatur denuò recta RF; hæc curvam AFI tanget.

(a) 22. Lect. VII.

(b) 16. Lect. VI.

* Hyp.

(c) 3 Lect. VIII.

(d) 2. Lect. VIII.

Concipiatur enim curva LFL talis; ut ductâ quâcunque rectâ PL ad AB parallelâ (quæ curvam AEG in G, rectam TE in H, curvam LFL in L ſecet) ſit perpetuò recta PL æqualis ipſis TH, HG ſimul; eſt itaque PL (a) ⌐ arc. AEG* = PI. Unde curva LFL curvam AFI tangit. Item recta IK (b) æquatur rectæ TH; (c) adeóque curva LFL rectam RFK tangit; (d) quare curvam AFI tanget recta.

VI. Etiam ſi rectæ DE ad arcus AE quamlibet ſemper eandem rationem habeant, recta RF nihilominus curvam AFI tanget, ut ex hac, & ſexta octavæ Lectionis facilè patet.

Fig. 107.

VII. Sit punctum D; duæque curvæ AGE, DIF ità verſus ſe relatæ ſint, ut à puncto D projectâ quâvis rectâ DFE, ſit perpetuò recta DF æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AGE ad E; deſignanda jam eſt recta, quæ curvam DIF tangat (ad F).

(a) 16. Lect. VIII.

(b) 22. Lect. VII.

(c) Hyp.

(d) 4. Lect. VIII.

Sumatur ET par *arcui* FS; concipiatúrque *curva* DKK talis, ut à D projectâ utcunque rectâ DH (quæ curvam DKK in K, rectam TE in H ſecet) ſit perpetuò DK = TH; tum curvam DKK (a) tangat recta FS ad F; hæc curvam DIF quoque tanget.

Intelligatur enim *curva* LFL talis, ut à D projectâ quapiam rectâ DH (quæ rectam TE ſecet in H, curvam LFL in L) ſit ſemper DL = TH + HG; eſt itaque DL (b) ⌐ arc. AG (c) = DI; (d) itaque curvæ DIF, LFL ſeſe (b) contingent. item curvæ KFK, LFK

LFK ſeſe contingunt. (e) quare curvæ D I F, K F K ſe quoque contingent. (e) ergo denique recta F S curvam D I F continget. (e) 2. Lect. VIII.

VIII. Quòd ſi rectæ D F quamvis aliam conſtanter eandem ad arcus A E rationem obtinuerint, itidem deſignari poteſt recta curvam D I F tangens, ex hac, & ſeptima octavæ Lectionis; erit utique tangens iſta huic F S parallela.

IX. Hinc nedum *ſpiralis circularis*, aſt innumerabilium ſimili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam A E H, recta A D (in qua determinatum punctum D) recta D H poſitione data; ſit item curva A G B talis, ut in hac aſſumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projectâ rectâ D G E (quæ curvam A E H ſecet in E) ductâque G F ad D H parallelâ habeant A E, A F aſſignatam rationem X ad Y; tangat autem recta E T curvam A E H; recta deſignetur oportet, quæ curvam A G B ad G tangat. Fig. 108.

Fiat recta E V æqualis arcui E A; & concipiatur curva O G O talis, ut projectâ quâcunque rectâ D O L (quæ curvam O G O ſecet puncto O, rectam E T in L) ductâque O Q ad G F parallelâ, ſit V L. A Q :: X. Y; eſtque curva O G O (è ſupra monſtratis) *Hyperbola*; hanc tangat recta G S; etiam recta G S curvam A G B continget.

Nam concipiatur altera curva N G N talis, ut cùm hanc ſecet recta arbitraria D L in N, curvam A E H in K, rectam T E in L; ductáq; ſit N R ad G F parallela, ſit V L ∔ L K. A R :: X. Y; manifeſtum eſt curvam N G N utramque curvam A G B, & O G O tangere. [ſecet enim recta D L curvam A E B in I, ducatúrque I P ad G F parallela; quum ergò ſit V L ∔ L K. A R :: X. Y :: A K. A P. & ſit V L ∔ L K ⊏ A K; erit A R ⊏ A P; vel D R ⊐ D P; adeóque D N ⊐ D I; unde punctum N intra curvam A G B ſemper cadet; ac proinde curva N G N curvam A G B tanget; ſimilíque planè diſcurſu curva N G N curvam O G O continget.] Itaque curvæ A G B, O G O ſeſe (æquipollenter) tangunt. Quare cùm recta G S curvam O G O tangat; eadem curvam A G B quoque continget: Q. E. F.

Si curva A E H ſit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva A G B *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cùm omnium ſimili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto deſignatur,

Hujuſmodi

Hujuſmodi plura quædam cogitaram hîc inſerere; verùm hæc exiſtimo ſufficere ſubindicando modo, juxta quem, citra *Calculi moleſtiam*, *curvarum tangentes* exquirere licet, unáque conſtructiones demonſtrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aſpernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimis applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque creſcant; ſit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* ſecet punctis E, F, ipſam V D in D) ſit ſemper *rectangulum* ex D F, & deſignatâ quâdam R æquale *ſpatio* reſpectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E. D F :: R. D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget. Fig. 109.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò ſupra punctum F, verſus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expoſitas ſecent, ut vides) éſtque tum L F. L K :: (D F. D T ::) D E. R; adeóque L F × R = L K × D E. Eſt autem (ex præſtituta linearum iſtarum natura) L F × R æquale ſpatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⌐ D P × D E. Unde eſt L K ⌐ D P; vel L K ⌐ L I. Fig. 110.

Rurſus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; ſimilique jam planè diſcurſu conſtabit fore L K × D E = P D E G ⌐ D P × D E, unde jam erit L K ⌐ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (ſeu extra) curvam V I F I exiſtere.

Iiſdem quoad cætera poſitis, ſi *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decreſcant, eadem concluſio ſimili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Diſcrimen*, quòd in hoc caſu (contra quàm in priore) linea V I F concavas ſuas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari ſpatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ta relatæ, ut ad communem ipſarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, ſit ſemper quadratum ex D E æquale *duplo ſpatio* V D E Z; ſumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit. Fig. 111.

Concipiatur enim linea V I F, per F tranſiens, talis qualem mox attigimus (cujus ſcilicet ad V D applicatæ ſe habeant ut ſpatia V D E Z; hoc eſt ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præſente hypotheſi) lineámque

lineámque V I F tangat recta F T; item lineam V K F tângat recta F S. Eſt ergò S D (a) = 2 T D. atqui D E × D T (b) = V D E Z. ergò D E × S D = (2 V D E Z =) F Dq. unde conſtat angulum Q F S rectum eſſe. quod Propoſitum erat. (a) 5. Lect. IX. (b) Cor. præc.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII. Sit curva quævis A G E Z, punctúmque quoddam D (à quo projectæ D A, D G, D E, &c. ab initio D A continuò decreſcant) tum altera ſit curva D K E, priorem interſecans in E, naturâque talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D K G (quæ curvam A E Z ſecet in G, curvam D K E in K) ſit perpetuò rectangulum ex D K, & deſignatâ quâdam lineâ R æquale ſpatio A D G; tum ductâ D T ad D E perpendiculari, ſit D T = 2 R; & connectatur T E; hæc curvam D K E continget. Fig. 112.

Nam ſumpto quovis in curva D K E puncto K, ducatur recta D K G; & ſumptâ D L = D K, ducatur L R ad D T parallela (ſecans ipſam D G in Y). tum per E ducatur E X ad D E perpendicularis (hæc verò extra curvam A E Z, ad partes Z cadet, quia decreſcunt projectæ verſus Z; unde E X verſus A intra curvam E G A cadet; eatenus ſaltem, quatenus huic Propoſito ſatisfaciet). Sit jam primò punctum G ſupra E, verſus initium A, & ob T D. D E :: R L. L E; adeóque R L × D E = T D × L E (a) = 2 R × L E (a) = 2 G D E ⌐ 2 D E X = E X × D E. ergò R L ⌐ E X ⌐ L Y. Eſt autem punctum Y extra curvam, quia D Y ⌐ D L = D K; ergò magis punctum R eſt extra curvam. Fig. 113. (a) Hyp.

Sit rurſus punctum G infra punctum E. verſus Z; eſtque rurſus, uti priùs, R L × D E = 2 G D E ⊐ 2 triang. E D X = E X × D E. unde R L ⊐ E X ⊐ L Y. Eſt autem recta L Y extra curvam E K tota, (nam etiam extra arcum L K curvæ K E circumductum tota jacet) ergò punctum R rurſus extra curvam exiſtit. Liquidum eſt igitur rectam T E R curvam D K E tangere.

Quòd ſi punctum aliud in curva D K E deſignetur, puta K; per quod ducta ſit D K G; & fiat D G. D K :: R. P; ſumaturque D T = 2 P; & connectatur T G; tum ducatur K S ad G T parallela; recta K S curvam D K E tanget.

Nam concipiatur curva D O G, per G tranſiens, talis, ut rectâ quâcunque D O N à D projectâ (quæ curvam D O G ſecet in O, curvam D N E in M, curvam A G E in N) ſit ſemper D O × P æqualis ſpatio A D N; erit ideò D M × R = D O × P; ac proinde D M. D O :: P. R. unde lineæ D K E, D O G analogæ erunt. Verùm

rum ex jam modò oſtenſis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipſam D K E continget.

Notetur eſſe D G q . D K q :: 2 R . D S .

Nam eſt D G q . D K q = D G . D K + D G . D K = R . P + D T . D S = R . P + 2 P . D S = 2 R P . P × D S = 2 R . D S . itaque D G q . D K Q :: 2 R . D S.

Hæc autem perinde vera ſunt, nec abſimili modo demonſtrantur; etiam ſi projectæ à D rectæ D A, D G, D E, *&c.* pares ſint (quo caſu curva A G E Z *Circulus* erit, & *Curva* D K E *Spiralis Archimedæa*) aut à D A continuò creſcant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema*:

XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità verſus ſe relatæ, ut à deſignato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum hæc ipſam D K E ſecet in K) ſit ſemper *Quadratum* ex D K *Quadruplum ſpatii* A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & facto D K. D G :: D G . D H; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis.

Fig. 114.

Nam concipiatur linea D O K O, per K tranſiens, naturâque talis ut ad illam à D projectæ (ceu D K) ſe habeant in eadem quâ ſpatia A D G ratione (quales lineas attigimus in proximè ſuperiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; conveniant âutem hæ cum ipſa H D punctis T, S; eſt igitur (è præcedente) D G q. D K q :: $\frac{DK}{2}$. D T. hoc eſt D H . D K :: $\frac{DK}{2}$ D T; hoc eſt (quo-

* *In* 12. *hujus.* niam è * mox præmonſtratis D S = 2 D T) D H . D K :: ($\frac{DK}{2}$. $\frac{DS}{2}$ ::) D K . D S. Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem eſſe: Q. E. D.

Ità Propoſiti noſtri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti ſumus. Cui ſupplendæ, appendiculæ inſtar, ſubnectemus à nobis uſitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud ſcio, poſt tot ejuſmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex uſu ſit facere. Facio ſaltem ex Amici conſilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendioſa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M poſitione datæ rectæ lineæ (quarum P M propoſitam curvam ſecet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M, rectam

rectam A P ſecare ad T; ut ipſius jam rectæ P T quantitatem exquiram; curvæ arcum M N indefinitè parvum ſtatuo; tum duco rectas N Q ad M P, & N R ad A P parallelas; nomino M P = *m*; P T = *t*; M R = *a*; N R = *e*; reliquáſque rectas, ex ſpeciali curvæ natura determinatas, utiles propoſito, nominibus deſigno; ipſas autem M R, N R (& mediantibus illis ipſas M P, P T) per *æquationem* è Calculo deprehenſam inter ſe comparo; regulas interim has obſervans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipſarum *a*, vel *e* poteſtas habetur, vel in quibus ipſæ ducuntur in ſe (etenim iſti termini nihil valebunt). Fig. 115.

2. Poſt *æquationem conſtitutam*, omnes abjicio terminos, literis conſtantes quantitates notas, ſeu determinatas deſignantibus; aut in quibus non habentur *a*, vel *e*. (etenim illi termini ſemper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro *a* ipſam *m*; (vel M P) pro *e* ipſam *t* (vel *P T*) ſubſtituo. Hinc demùm ipſius P T quantitas dignoſcetur.

Quòd ſi calculum ingrediatur curvæ cujuſpiam indefinita particula; ſubſtituatur ejus loco tangentis particula ritè ſumpta; vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è ſubnexis Exemplis clarius eluceſcent.

Exemp. I.

Angulus A B H rectus ſit; & ſit curva A M O talis, ut per A ductâ utcunque rectâ A K, quæ rectam B H ſecet in K, curvam A M O in M, ſit ſemper ſubtenſa A M æqualis abſciſſæ B K; hujus curvæ ad M tangens eſt deſignanda. Fig. 116.

Fiant quæ ſupra præſcripta ſunt, & (ductâ A N L) nominetur A B = *r*; & A P = *q*; unde A Q = *q* — *e*; item Q N = *m* — *a*. ergò eſt $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma$ = (A Q q + Q N q = A N q =) B L q; hoc eſt (rejectis, uti monitum eſt, rejiciendis) $qq - 2qe + mm - 2ma$ = B L q. Porrò eſt A Q. Q N :: A B. B L; hoc eſt $q - e . m - a :: r . BL = \frac{rm - ra}{q - e}$. quare $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe.} = BLq$; ſeu (rejectis ſuperfluis) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} = BLq = qq - 2qe +$ $mm - 2ma$. vel $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e +$ $4qqee - 2qmme + 4qmae$; hoc eſt (abjectis iis, quæ præſcripſimus abjici-

abjicienda) $-2rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$. vel $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$; vel denuò ſubſtituendo m pro a, & t pro e, eſt $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; vel $\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT$.

Exemp. II.

Fig. 117. Sit recta EA (poſitione ac magnitudine data) & curva EMO proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ MP ad EA perpendiculari *Summa Cuborum* ex AP, & MP æquetur *Cubo* rectæ AE.

Nominentur $AE = r$; $AP = f$; unde $AQ = f + e$; & AQ cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (ſeu abjectis ſuperfluis, ex præſcripto) $= f^3 + 3ffe$. Item NQ cub. = cub. $m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (hoc eſt) $= m^3 - 3mma$. Quapropter eſt $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (AQ cub. + NQ cub. = AE cub. =) r^3. abjectiſque datis, eſt $3ffe = 3mma = o$. ſeu, $ffe = mma$; ſubrogatiſque loco a, & e ipſis m, & t, erit $fft = m^3$; ſeu $t = \frac{m^3}{ff}$; eſt ergò PT quarta proportionalis in ratione AP ad PM continuata.

Similiter, Si fuerit $APqq + MPqq = AEqq$; reperietur fore $PT = \frac{m^4}{f^3}$; vel PM quarta proportionalis in ratione AP ad PM; ac ità porrò; quod de *Cycloformibus* iſtis lineis an obſervatu dignum ſit neſcio.

Exemp. III.

Fig. 118. *La Galande* Poſitione data ſit recta AZ, & AX magnitudine; ſit etiam *curva* AMO talis, ut ductâ utcunque rectâ MP ad AZ normali, ſit AP *cub.* + PM *cub.* = AX × AP × PM.

Dicantur $AX = b$; & $AP = f$; ergò $AQ = f - e$; & AQ *cub.* $= f^3 - 3ffe$; & QN *cub.* $= m^3 - 3mma$. & $AQ \times QN = fm - fa - me + ae = fm - fa - me$; unde $AX \times AQ \times QN = bfm - bfa - bme$; hinc æquatio $f^3 - 3ffe + m^3 - 3mma = bfm - bfa - bme$; ſeu amoliendo rejectanea

ctanea, $bfa - 3mma = 3ffe - bme$; ſubſtituendóque $bfm - 3m^3 = 3fft - bmt$; ſeu, $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$.

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* CMV (ad circulum CEB pertinens cui centrum A,) cujus axis VA; ordinatæ CA. MP ad VA perpendiculares.

Protractis rectis AME, ANF, ductiſque rectis EK, FL ad AB perpendicularibus, dicantur arcus $CB = p$; radius $AC = r$; recta $AP = f$; $AM = k$. Eſtque jam CA arc. CB :: NR. arc. FE, Fig. 119.

hoc eſt, $r.p :: a.\frac{pa}{r}$ = arc. FE. & AM. MP :: AE. EK; hoc eſt, $k.m :: r.\frac{rm}{k}$ = EK; item AE. EK :: arc. FE, LK. hoc eſt $r.\frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r}.\frac{pma}{rk}$ = LK. Verùm AM. AE :: AP. AK; hoc eſt $k.r :: f.\frac{rf}{k}$ = AK. ergò $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk}$ = AL. Et $\frac{rrff}{kk} - \frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis ſuperfluis) = AL q; adeóque LF q = $\frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa.}{kk}$

Eſt autem AQq. QNq :: ALq. LFq; hoc eſt $Q:f - e.Q:m + a ::$ ALq. LFq. hoc eſt $ff - 2fe.mm + 2ma :: rrff - 2fmpa.rrmm + 2fmpa$. Unde (ſublatis ex norma rejectaneis) emerget *æquatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; ſeu $kkpa - rrfa = rrme$; vel ſubſtituendo juxta *præſcriptum*, $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur eſſe rectam $AT = \frac{kk}{rr}p$; hoc eſt (quoniam, ut notum eſt, $AV = \frac{rr}{p}$) erit $AT = \frac{AMq}{AV}$; ſeu, AV. AM :: AM. AT.

Exemp. V.

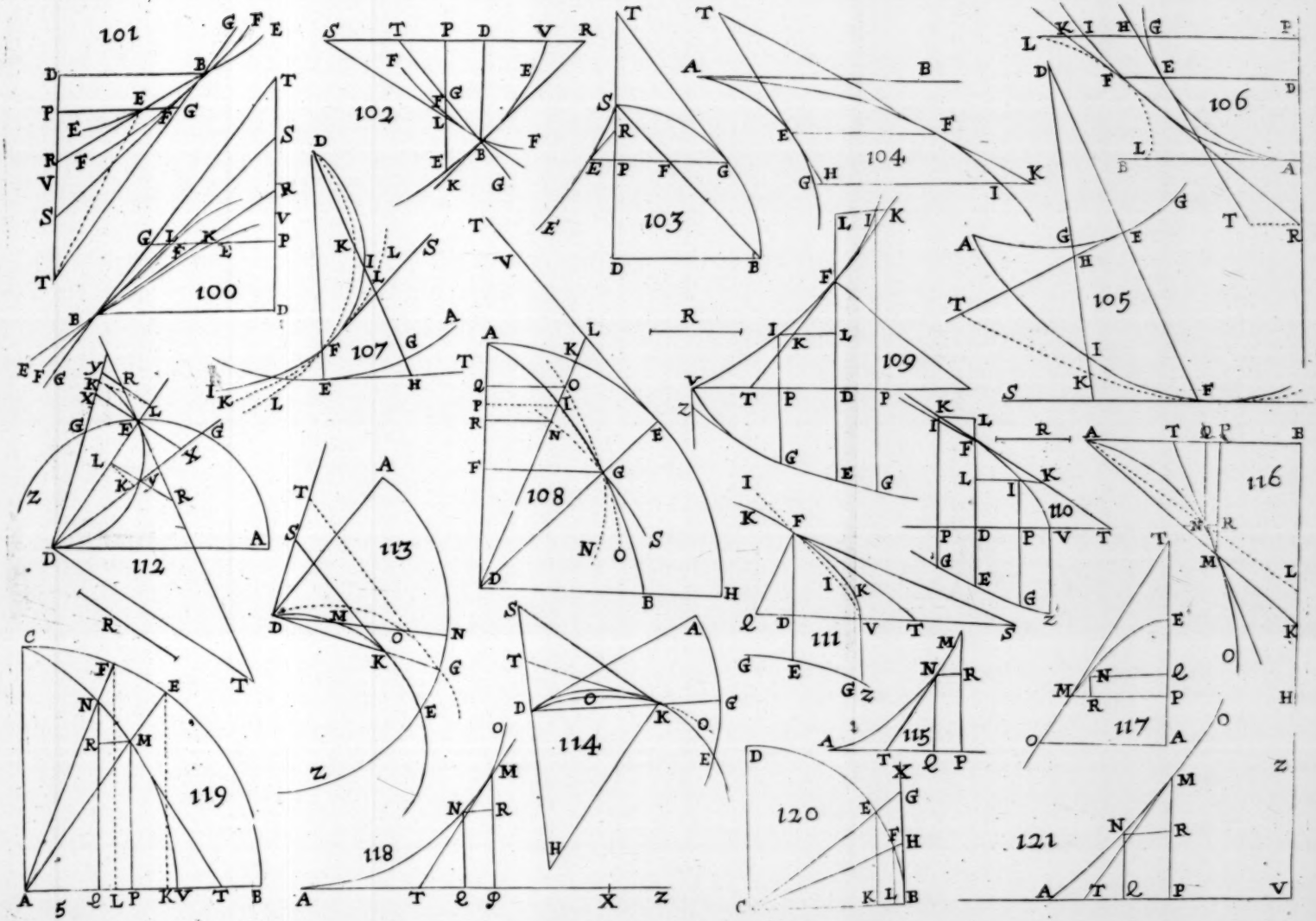
Fig. 120, 121. Sit D E B *Quadrans Circuli*, quem tangat recta B X; tum linea A M O talis, ut in recta A V utcunque ſumptâ A P, quæ arcum B E adæquet, erectáque P M ad A V normali, ſit P M æqualis arcûs B E tangenti B G.

Sumpto arcu B F = A Q; & ductâ C F H, demiſſis E K, F L ad C B normalibus; nominentur C B = r. C K = f: K E = g. Et quoniam eſt C E. E K :: arc. E F. L K; vel C E. E K :: Q F. L K; hoc eſt $r . g :: e . \frac{ge}{r}$ = L K; erit C L = $f + \frac{ge}{r}$. Et L F = $\sqrt{rr - ff - \frac{2fge}{r}} = \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}}$.

Eſt autem C L. L F :: (C B. B H ::) C B. Q N. hoc eſt, $f + \frac{ge}{r} \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}} :: r . m - a$. vel (quadrando) $ff + \frac{2fge}{r} gg - \frac{2fge}{r} :: rr . mm - 2ma$. Unde (dimiſſis quæ oportet) obtinetur æquatio, $rfma = grre + gmme$. unde ſubſtituendo, eſt $rfmm = grrt + gmmt$. vel $\frac{rfmm}{grr + gmm} = t$. ſeu (quoniam eſt $m = \frac{rg}{f}$) erit $t = \frac{rr}{rr + mm} m = \frac{CB^q}{CG^q} BG = \frac{CK^q}{CE^q} BG$.

Hæc ſufficere videntur huic methodo elucidandæ.

LECT. XI.


101
100
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121

LECT. XI.

RElíquis utcunque patratis, apponemus iam *quæ ad magnitudinum è tangentibus* (ſeu è perpendicularibus ad curvas) *Dimenſiones eliciendas pertinentia ſe obiecerunt Theoremata*; de compluribus utiq; ſelectiora quædam.

I. Sit curva quæpiam V H (cujus axis V D, applicata H D ad V D normalis) item linea ☉ Z ↓ talis, ut ſi à curvæ puncto liberè ſumpto (putaE) ducatur recta EP ad curvam perpendicularis, & recta EAZ ad axem perpenicularis, ſit recta AZ interceptæ A P æqualis; erit *ſpatium* A D ↓ ♀ *æquale ſemiſſi quadrati* ex recta D H. Fig. 122.

Nam ſit angulus H D O ſemirectus; & æquiſecetur recta V D indefinitè punctis A, B, C; per quæ ducantur rectæ E A Z, F B Z, G C Z, ad H D parallelæ; curvæ occurrentes in E, F, G; à quibus rectæ E I Y, F K Y, G L Y ad V D (vel H O) parallelæ ducantur; quin & rectæ E P, F P, G P, H P curvæ V H perpendiculares ſint; lineæ verò ſe interſecent; ut vides. Eſtque triangulum H L G ſimile triangulo P D H (nam ob indefinitam ſectionem curvula G H pro rectâ haberi poteſt) quare H L . L G :: P D . D H. adeóque H L × D H = L G × P D; hoc eſt H L × H O = D C × D ↓. Simili monſtrabitur diſcurſu, quoniam triangulum G M F triangulo P C G aſſimilatur, fore L K × L Y = C B × C Z; & ſimiliter K I × K Y = B A × B Z; itidem denuò I D × I Y = A V × A Z; unde conſtat triangulum H D O (quod à rectangulis H L × H O + L K × L Y + K I × K Y + I D × I Y minimè differt) æquari ſpatio V D ↓ ♀ (quod itidem à rectangulis D C × D ↓ + C B × C Z + B A × B Z + A V × A Z minimè differt); hoc eſt $\frac{DHq}{2}$ æquari ſpatio V D ↓ ♀.

Longior diſcurſus apagogicus adhiberi poſſit, at quorſum?

II Iiſdem

II. Iisdem positis, atque paratis; *summa rectangulorum* AZ × AE + BZ × BF + CZ × CG, *&c.* æquatur *trienti cubi* ex basi DH.

Fig. 122.

Nam ob HL.LG::PD.DH::PD × DH.DHq; erit HL × DHq = LG × PD × DH. hoc est HL × HOq = DC × D↓ × DH. Similique discursu, LK × LYq = CB × CZ × CG. & KI × KYq = BA × BZ × BF, *&c.* Verùm HL × HOq + LK × LYq + KI × KYq, *&c.* adæquant trientem cubi ex DH; itaque liquet Propositum.

III. Simili ratione constabit summam AZ × AEq + BZ × BFq + CZ × CGq, *&c.* æquari $\tau\tilde{\omega}\frac{DH\,qq}{4}$ & esse summam AZ × AE cub. + BZ × BE cub. + CZ × CG cub. *&c.* $= \frac{DH\,\sharp}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

IV. Exhinc consectantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit VD↓φ spatium quodlibet, cujus axis VD, ut dictum, æquisectus; si concipiantur singula spatia VAZφ, VBZφ, VCZφ, *&c.* in suas ordinatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè singulas duci, quæ proveniet summa adæquabitur ipsius spatii VD↓φ semiquadrato.

Fig. 122.

Nam (uti priùs ostensum) figuræ VD↓φ adaptari potest spatium VDH; tale nimirum, ut ductâ quâvis ad curvam VH perpendiculari, ceu EP, sit AP sibi respondenti applicatæ AZ æqualis; (*b*) unde fiet spatium $VAZ\varphi = \frac{AE\,q}{2}$; & $VBZ\varphi = \frac{BF\,qq}{2}$ & $VCZ\varphi = \frac{CG\,q}{2}$ *&c.* quapropter omnia VAZφ × AZ + VBZφ × BZ + VCZφ × CZ, *&c.* æquabuntur omnibus $\frac{AE\,q \times AZ + BF\,q \times BZ + CG\,q \times CZ}{2}$

Præced. Lect. X.
(*b*) 1 *hujus.*
Fig. 122.

(*c*) 3 *hujus.*

(*c*) hoc est $\tau\tilde{\omega}\frac{DH\,qq}{4\times 2}$; (*b*) hoc est $\tau\tilde{\omega}\frac{VD\downarrow\varphi \times VD\downarrow\varphi}{2}$.

V. Quòd si ducantur omnia $\sqrt{VAZ\varphi}$, $\sqrt{VBZ\varphi}$, $\sqrt{VCZ\varphi}$, *&c.* in suas applicatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè proveniet aggregatum æquale duabus tertiis radicis quadratæ facti ex ipso spatio VD↓φ cubato ($\tau\tilde{\omega}\,\frac{2}{3}\sqrt{VD\downarrow\varphi^{\frac{3}{2}}}$)

Nam adaptatâ curvâ VH, est $\sqrt{VAZ\varphi} = AE\sqrt{\frac{1}{2}}$; & $\sqrt{VBZ\varphi} = BF\sqrt{\frac{1}{2}}$; & $VCZ\varphi = \sqrt{CG}\sqrt{\frac{1}{2}}$, *&c.* Cùm itaque sint omnia

omnia $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, &c. $= \frac{DH \text{ cub.}}{3}$ erunt omnia $AZ \times \sqrt{VAZ}\varphi + BZ \times \sqrt{VBZ}\varphi + CZ \times \sqrt{VCZ}\varphi$, &c. $= \frac{DH \text{ cub}}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{DH^6}{18}}$. Est autem $DHq = 2VD \downarrow \varphi$, vel $DH^6 = 8VD \downarrow \varphi^3$; quapropter omnia $AZ \times \sqrt{VAZ}\varphi + BZ \times \sqrt{VBZ}\varphi + CZ \times \sqrt{VCZ}\varphi$, &c. $= \sqrt{\frac{8}{18}}VD \downarrow \varphi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{VD \downarrow \varphi^3}$.

VI. *Exempla.* Sit $VD \downarrow$ circuli quadrans (cujus radius dicatur R, & Peripheria P) segmenta VAZ, VBZ, VCZ, &c. in sinus rectos AZ, BZ, CZ, &c. ducta conficient $\frac{RqPq}{8}$. Fig. 123.

Item Summa $AZ\sqrt{VAZ} + BZ\sqrt{VBZ} + CZ\sqrt{VCZ}$, &c. $= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3P^3}{8}} = \sqrt{\frac{R^3P^3}{18}}$.

Si $VD \downarrow$ sit parabolæ segmentum, factum è segmentis in applicatas erit $\frac{2}{9}VDq \times A \downarrow q$; ac è radicibus segmentorum in applicatas factum erit $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{2}{27}}VD^3 \times D \downarrow^3 \sqrt{\frac{2^3}{2^4 3}}VD^3 \times D \downarrow^3$.

Similia plura de factis è *Segmentorum poteſtatibus, aut radicibus aliis in applicatas, aut ſinus ductis*, hinc extundi poſſent.

VII. E dictis porrò ſequitur, ſi omnes (vertici, & perpendicularibus interjectæ) VP per reſpectiva puncta A, B, C, &c. Concipiantur applicatæ, puta ut AY, BY, CY, &c. reſpectivis VP æquentur; erit è hic applicatis *conſtitutum ſpatium* $AD\xi\theta$ *æquale ſemiſſi quadrati ex ſubtenſa* VH.

Nam, ob omnes $VA + VB + VC$, &c. $= \frac{VDq^3}{2}$ & omnes $AP + BP + CP$ &c. $= \frac{DHq}{2}$, liquet fore omnes $VP = \frac{VHq}{2}$.

VIII. Porrò, ſi (poſitis iiſdem) ſit curva RXXS talis, ut ſit $IX = AP$, & $KX = BP$; & $LX = CP$, &c. erit *ſolidum factum ex ſpatio*

ſpatio V D ↓ φ *circa axem* V D *rotato ſubduplum ſolidi ex ſpatio* D R S H, *itidem circa axem* V D *rotato, confecti.*

Nam ob H L. L G :: P D. D H :: D ↓ *q*. D H :: D ↓ *q*. H S × D H; erit H L × H S × D H = L G × D ↓ *q*. = D C × D ↓ *q*. Simili planè diſcurſu erit L K × L X × D L = C B × C Z *q*; & K I × K X × D K = B A × B Z *q*, &c. atqui ſolidum prius eſt $\frac{\varpi}{\delta}$: A Z *q* + B Z *q* + C Z *q*, &c. & ſolidum poſterius eſt $\frac{2\varpi}{\delta}$: D I × I X + D K × K X + D L × L X, &c. itaque conſtat Propoſitum.

Fig. 124. IX. Hæc itidem omnia ſimili ratione vera ſunt, etiam ſi curva V E H rectæ V D convexas ſuas partes obvertat; nempe quovis in curva accepto puncto E; & per hoc ducta E P ad curvam V E H perpendiculari, & E A Y ad rectam V D normali, factáque A Z = A P; erit ſpatium V D ↓ = $\frac{D H q}{2}$ Sin quoque fiat A Y = V P; erit ſpatium V D ξ = $\frac{V H q}{2}$ Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipſarum immediatè conſtructione) *dimenſiones innoteſcant*, ab experientia facilè comperietur.

Fig. 125. X. Sit rurſus curva quæpiam V H (cujus axis V D, baſis D H) & linea D Z Z O talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu E, ducta rectâ E T, quæ curvam tangat, & recta E I Z ad baſin parallelâ, ſit perpetuò I Z æqualis ipſi A T; dico *ſpatium* D H O *ſpatio* V D H *æquari.*

Æquiſecetur enim recta D H indefinitè, punctis I, K, L, per quæ ducantur rectæ E I Z, F K Z, G L Z ad V D parallelæ, curvæque occurrentes ad E, F, G, unde ducantur rectæ E A, F B, G C ad H D parallelæ, rectæque E T, F T, G T (ut & H T) *curvam tangentes*; lineæ verò ſe, ut Schema monſtrat, interſecent. Eſtque jam triangulum G L H ſimile triangulo T D H (nam ob diviſionem iſtam indefinitam arculus G H rectæ inſtar cenſeri poteſt, eatenus tangenti H T coincidens) quare L G. L H :: T D. D H; & L G × D H = L H × T D; ſeu C D × D H = L H × H O. ſimili ratiocinio eſt B C ×

C G

CG=KL×LZ; & AB×BF=IK×KZ, & VA×AE=DI×IZ. Verùm ſumma CD×DH+BC×CG+AB×BF+VA×AE à ſpatio VDH minimè differt; & ſumma LH×DO+KL×LZ+IK×KZ+DI×IZ à ſpatio DHO minimè differt. itaque ſpatio VDH, DHO æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctiſſimo Viro *D. Gregorio Aberdonenſi* debetur, cui ſequentia ſubnectimus.

XI. Iiſdem poſitis; ſolidum ex ſpatio DHO circa axem VDR rotato factum duplum erit ſolidi facti ex ſpatio VDH itidem circa axem VD rotato. Fig. 125.

Nam eſt HL. LG:: (DH. DT:: DH. HO::) DHq. DH×HO. unde HL×DH×HO=LG×DHq=CD×DHq. Similique diſcurſu ſunt LK×DL×LZ=BC×CGq. & KI×DK×KZ=AB×BFq. & demum ID×DI×IZ=VA×AEq. Eſt autem (ut vulgo notatum habetur) ſumma CD×DHq+BCB×CGq+AB×BFq+VA×AEq dupla ſummæ DI×IE+DK×KF+DL×LG, *&c.* Quare ſolidum ex ſpatio HDO circa axem DR converſo factum duplum eſt ſolidi, quod è ſpatio VDH circa VD converſo producitur.

XII. Hinc, ſumma DI×IZ+DK×KZ+DL×LZ, &c. æquatur ſummæ quadratorum ex applicatis ad VD; ſcilicet ipſis AEq+BFq+CGq, &c.

XIII. Simili ratiocinio conſtabit ſummam DIq×IZ+DKq×KZ+DLq×LZ, &c. triplam eſſe ſummæ DIq×IE+DKq×KF+DLq×LG, &c. hoc eſt æqualem ſummæ cuborum ab omnibus AE, BF, CG, &c. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas poteſtates* obſervabilis eſt Concluſionum tenor.

XIV. Iiſdem poſitis; ſi DXH ſit linea talis, ut quævis ad DH ordinata, ceu IX, ſit media proportionalis inter ſibi congruas ordinatas IE, IZ; erit ſolidum ex ſpatio VDH circa axem DH rotato duplum ſolidi ex ſpatio DXH circa eundem axem DH converſo procreati.

Nam ob VA×AE=DI×IZ, erit VA×AE×EI=DI×IZ×IE=ID×IXq. Similique de cauſa AB×BF×FK=IK×KXq; & BC×CG×GL=KL×LXq, &c. Eſt autem ſumma VA×AE×FI+AB×BF×FK+BC×CG×GL, &c. Subdupla ſumma *In 10. hujus.*

mæ VDq + EIq + FKq + GLq; ergò ſumma IXq + KXq + LXq + HXq, ſubdupla eſt ſummæ VDq — EIq + FKq + GLq. Vnde liquet Propoſitum.

XV. Quòd ſi curva DXH talis concipiatur, ut ſit ordinata quæpiam, ceu IX, inter congruas ordinatas IE, IZ bimedia *; erit ſumma cuborum ex IX, KX, LX, &c. ſubtripla cuborum ex DV, IE, KF, &c. Sin IX ſit trimed.* erit $IXqq + KXqq + LXqq, \&c. = \frac{DVqq + IEqq + KFqq}{4}$ &c. ac ità porrò quoad cæteras poteſtates. * *Not.* bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima eſt, &c.

Hæc ſimili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget κοκκύζειν.

XVI. Sit porrò linea VYQ talis, ut ordinata AY ipſi AT; & ordinata BY ipſi BT, &c. æquentur; erit IZq + KZq + LZq, &c. (ſumma quadratorum ex ordinatis à curva DZO ad rectam DH) æqualis ſummæ VA × AE × AY + AB × BF × BY + BC × CG × CY, &c. (hoc eſt figuræ VDH in figuram VDQ ductæ).

XVII. Item, ſumma IZ. cub. + KZ cub. + LZ cub. &c. = VA × AE × AYq + AB × BE × BYq + BC × CG × CYq, &c. *hoc eſt figura* VDH *in figura* VDQ *quadrata ducta*). Similis & aliarum *poteſtatum* eſt ratio.

Ad ſuperiorum normam hæc facilè colliges.

XVIII. Eadem vera ſunt, & omnino ſimili ratione comprobantur, Etiam ſi curvæ VH convexa rectæ VD obvertantur. Nempe, ſi linea DZO talis ſit, ut ductâ per quodvis in curva VH punctum E tangente ET, & EA ad HD parallelâ, ac EIZ ad VD parallelâ, ſit perpetim IZ = AT; erit ſpatium DHO ſpatio VDH æquale; & ſolidum factum ex ſpa- Fig. 126. DHO circa axem VR converſo duplum erit ſolidi ex ſpatio VDH circa eundem axem VD rotato producti. quin & reliqua pari modo convenient.

XIX Porrò, ſit curva quæpiam AMB, cujus axis AD, & huic perpendicularis BD; tum alia ſit linea KZL talis, ut ſumpto in cur- Fig. 127. va AB utcunque puncto M; & per hoc ductis rectâ MT curvam AB tangente, rectâ MFZ ad DB parallelâ (quæ lineam KL ſecet in Z, rectam AD in F) datâque quâdam lineâ R; ſit TF. FM :: R.

R . FZ ; erit ſpatium ADLK æquale rectangulo ex R, & DB.

Nam ſit DH = R ; & compleatur rectangulum BDHI ; tum aſſumptâ MN indefinitè parvâ curvæ AB particulâ ducantur NG ad BD ; & MEX, NOS ad AD parallelæ. Eſtque NO. MO :: TF. FM :: R . FZ. Unde NO × FZ = MO × R ; hoc eſt FG × FZ = ES × EX. ergò cum omnia rectangula FG × FZ minimè differant à ſpatio ADLK ; & omnia totidem rectangula ES × EX componant rectangulum DHIB, ſatis liquet Propoſitum.

XX. Iiſdem poſitis, ſit curva PYQ talis, ut ſumpta in ſumpta recta MX ordinata EY (reſpectivæ) ipſi FZ æquetur, erit *ſumma quadratorum* ex FZ (ad rectam AD computata) par ei quod fit ex ipſa R in *ſpatium* DBQB ducta.

Eſt enim FG. ES :: NO. MO :: R × FZ. FZq :: R × EY. FZq. adeóque FG × FZq = ES × R × EY.

XXI. Simili ratione *ſumma Cuborum* ex FZ æquatur ei quod fit ex R in ſummam quadratorum ex rectis EY ad BD applicatis. neque non ſimili quoad reliquas poteſtates tenore.

Fig. 128.

XXII. Sit curva quævis DOK, in qua deſignatum punctum D ; & ſubtenſa recta DK ; ſit item curva AE talis, ut à D projectâ quâvis rectâ DMF (quæ curvas ſecet punctis M, F) ductiſque DS ad DM normali, & MS curvam DOK tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datâque quâdam R, ſit DS. 2R :: DMq. DFq ; erit ſpatium ADE æquale ex R, DK.

Nam ſubtenſa DK indefinitè ſecta concipiatur punctis PQ, &c. per quæ centro C deſcripti tranſeant arcus PM, QRN ; curvam DOK ſecantes punctis M, N ; per quæ ducantur rectæ DMF, DNG ; ſint vero DT ad DK ; & DS ad DM perpendiculares ; quibus occurrant tangentes KT, MS. demùm centro D per E ducatur arcus EX ; & per F arcus FY. Jam, ob ſectionem indefinitam, eſt triangulum KPM triangulo KDT ſimile. ac ideò MP . PK :: TD . DK. item eſt DP . PM :: DE . EX. ſeu, propter aſſignatam cauſam, DK . MP :: DE . EX. Eſt itaque MP × DK . PK × MP :: TD × DE . DK × EX. hoc eſt DK . PK :: TD × DEq . DK × EX × DE. ac inde DKq × EX × DE = PK × TD × DEq. (a) Eſt autem DT . 2R :: DKq . DEq ; ſeu DT × DEq = 2R × DKq. ergò eſt DKq × EX × DE = PK × 2R × DKq. quare EX × DE = 2R × PK ; hoc eſt, 2 ſector DEX = 2R × PK. unde ſector DEX = R × PK. Simili planè diſcurſu ſector DFY

(a) *Hyp.*

æquatur ipſi R × RM, vel R × QP. itaque totum ſpatium ADE quod ab ejuſmodi ſectoribus minimè differt adæquatur toti R × DK. quod erat Propoſitum.

Fig. 128. XXIII. Iiſdem, quoad cætera, poſitis atque paratis, ducantur KH ad KT, & MI ad MS perpendiculares; & concipiatur jam curva AE naturâ talis, ut ſit DE = √DK × DH; & DF = √DM × DI; ac ità perpetuò; erit ſpatium ADE quadrati ex DK ſubquadruplum.

Nam eſt MP. PK :: DK. DH :: DKq. DK × DH :: DKq. DEq. item DP. PM :: DE. EX; hoc eſt DK. PM :: DE. EX. ergò MP × DK. PK × PM :: DKq × DE. DEq × EX. hoc eſt DK. PK :: DKq. DE × EX. vel DKq. DK × PK :: DKq. DE × EX. unde DK × PK = DE × EX. Simili ratione DM × MR (vel DP × PQ) = DF × FY. Verùm omnia DK × PK, DP × PQ, &c. æquantur ſemiſſi quadrati ex DK; & omnia DE × EX, DF × FY, &c æquantur *duplo ſpatio* EDA; unde manifeſte conſequitur Propoſitum.

Fig. 129. XXIV. Sit curva quæpiam DOK, in qua punctum D; cuique ſubtendatur recta DK; ſit item curva DZI talis, ut ſumpto in curva DOK puncto quopiam M, connexâque DM; & ductâ DS ad DM perpendiculari, & MS curvam DOK tangente; ſumptâ demum DP = DM, & ductâ PZ ad DK perpendiculari, ſit PZ = DS; erit *ſpatium* DKI æquale *duplo ſpatio* DKOD.

Nam recta KP concipiatur indefinitè parva; & DT ipſi DK perpendicularis ſit, & KT curvam DOK tangat. Eſt itaque (ducto arcu MP) rurſus KP. PM :: KD. DT :: KD. KI. unde KP × KI = PM × KD. Capiatur alia particula PQ, & centro D per Q ducatur arcus QN, quem ſecet ſubtenſa DM in R; eſt ergo rurſus MR. RN :: MD. DS; hoc eſt PQ. RN :: MD. PZ quare PQ × PZ = RN × MD; ac ità continuò deinceps. patet igitur omnia ſimul rectangula KP × KI, PQ × PZ, &c. æquari aggregato omnium PM × KD, RN × MD, &c. hoc eſt ſpatium DKI duplo ſpatio DKOD æquari.

Fig. 130. XXV. Iiſdem quoad cætera poſitis atque paratis, ordinatæ PZ jam æquales concipiantur ipſis MS reſpectivis; & ad rectam aſſumptam Xk, diſtantiáſque Xk, Xm, Xn, &c, æquales ipſis curvæ partibus DOK, DOM, DON, &c. applicentur rectæ k d, m d, n d, &c. pares

pares ſubtenſis K D, M D, N D; &c. erit ſpatium X *k d* æquale ſpatio D K I.

Nam eſt K M. K P :: K T. K D; hoc eſt *k m*. K P :: K I. *k d*. unde *k m* × *k d* = K P × K I. Similique pacto, M N. M R :: M S. M D. ſeu *m n*. P Q :: P Z. *m d*. unde *m n* × *m d* = P Q × P Z. ac ità deinceps. unde conſtat Propoſitum.

XXVI. Sin porrò, perſiſtentibus reliquis, adſumptâ quâvis rectâ. *k g*, completóque rectangulo X *k g h*, curva D Z I talis intelligatur, ut ſit M D. M S :: *k g*. P Z; erit rectangulum X *k g h* æquale ſpatio D K I. Fig. 130.

Nam eſt rurſus K P. K M :: K D. K T :: *k g*. K I. adeóque K P × K I = (K M × *k g* =) *k m* × *k g*. Similitérque P Q × P Z = *m n* × *k g*. ac ità ſemper. Unde conſtat.

Hinc noto ſpatio D K I cognoſcetur quantitas curvæ D O K.

Hujuſmodi verò complura deprehendet quiſquis hanc *Mineram* penitiùs explorârit, ac excuſſerit. Faciat cui id vacat & adlubeſcit.

XXVII. Uſui fortè nonnunquam erit (mihi ſubinde fuit) & hoc, è præmiſſis deductum Theorema. Fig. 131.

Sit curva quæpiam V E H (cujus axis V D, baſis D H) quam tangat utcunque recta E T; & ducatur E A ad H D parallela. tum altera ſtatuatur curva G Z Z talis, ut à puncto E ductâ rectâ E Z ad V D parallelâ (quæ baſin D H in I, curvam G Z Z in Z ſecet) adſumptâq; quâpiam determinatâ R, ſit ſemper D A q. R q :: D T. I Z; erit D A. A E :: R q. ſpat. D I Z G. (vel facto D A. R :: R. D P; ductâque P Q ad D H parallelâ, erit *Rectangulum* D P Q I par *ſpatio* D G Z I).

Etiam hoc adjiciatur *Theorema*; nonnunquam uſui futurum.

XXVIII. Sit curva quælibet A M B (cujus axis A D); ſit item linea K Z L proprietate talis, ut ſumpto in A M B quocunque puncto M, & ab eo ductis rectâ M P ad curvam A B perpendiculari (quæ axem A D ſecet in P) & rectâ M G ad A D perpendiculari (quæ curvam K Z L ſecet in Z) ſit conſtantèr G M. M P :: arc A M. G Z; erit *ſpatium* A D K L æquale *ſemiſſi quadrati* ex arcu A M. Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud magnâ operâ colligantur, id verò ſufficiat admonitum; etenim hic animus eſt paulo ſubſiſtere.

APPEN-

APPENDICULA.

I. CUm pridem ante plures annos illuſtris Viri, *Chriſtiani Hugenii*, *Cyclometrica* luſtrarem, ac in eo verſatus adverterem ad id negotii duas præſertim ab ipſo methodos adhiberi; quarum una *Circuli ſegmentum* duobus parabolicis (uni inſcripto, alteri adſcripto) medium eſſe monſtrans, illius inde magnitudini limites præſcribit; altera *Parabolici ſegmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis ſegmenti oſtendens, alteros exindè limites, adſignat; incidit mihi cogitatio poſſe loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in ſecunda, paraboliformium aliquam circulari ſegmento circumſcriptibilem uſurpari, ſic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum eſſe re perpenſâ comperi; quin & præterea notavi facilè ſuppares methodos *Hyperbolici ſegmenti dimenſioni* accommodari. Quorum demonſtratio (præ aliis fortaſſe, quæ excogitari poſſent) brevis & clara cùm è ſuprà poſitis conſequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hîc viſum eſt apponere.

II. Adſumimus autem hæc pervulgata; quorúmque demonſtrationes è præmonſtratis haud difficilè variis modis colligantur; ſi *paraboliformis* B A E (cujus *Axis* A D, *Baſis* vel ordinata B D E, *Tangens* B T; *Gravitatis centrum* K) exponens ſit $\frac{n}{m}$; erit *Area* B A E $= \frac{m}{n+m}$ A D × B E; & T D $= \frac{m}{n}$ A D, & K D $= \frac{m}{n+2m}$ A D. Fig. 133.

III. Sint duæ quævis curvæ A E B, A F B (quarum communis axis A D, ordinata D B) ità ſe habentes, ut ductâ quâcunque rectâ E F G ad B D parallelâ, quæ lineas expoſitas punctis E, F, G ſecet, poſitóque quòd rectæ E S, F T tangant curvas, (illa curvam A E B, hæc ipſam Fig. 134.

ipſam AFB) ſit perpetuo TG major quàm SG; *dico* nullam curvæ AFB partem intra ipſam AEB cadere.

Si fieri poteſt, cadat pars NFM; ita ſcilicet ut curva AFB curvam AEB interſecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata EFG; ſint verò lineæ LXK, RYQ tales, ut ductis rectis EO, FP ad ipſas ES, FT perpendicularibus, protractâque rectâ EG, ut hæc dictas lineas LK, QR ſecet punctis X, Y; ſit GX = GO, & GY = GP. Jam ex oſtenſis patet eſſe *ſpatium* $IHKL = \frac{HMq - INq}{2}$ = ſpat. IHQR; adeóq; ſpat. IHKL, IHQR æquari. Verùm ob GE. GO(GX):: SG; GE. ⊐SG. GF ⊐ TG. GF:: GF. GP (GY) ⊐ GE. GY; eſt GX ⊏ GY; adeòque (cum hoc ubique ſimiliter contingat) ſpatium IHKL majus ſpatio IHQR; quod repugnat oſtenſo. itaque liquet Propoſitum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc uſquam interſecat.

IV. Sit curva quæpiam BAE, cujus axis AD, & ad hunc ordinata baſis ADE; ſegmenti verò BAE centrum gravitatis ſit punctum H, qer quod ducta ſit recta RS ad BE parallela Porrò per puncta R, S tranſeat altera curva (vel linea quævis) MRASN, habens itidem axin AD, ac ita priorem curvam BAE ſecans, ut ejuſce pars ſuperior RKAPS intra curvam BAE cadat, inferiores verò reliquæ partes RM, SN extra eandem; erit ſegmenti MRASN centrum gravitatis infra punctum H, verſus baſin MN. Fig. 135.

Nam è ſegmento RIAOS ablatum RIAK + AOSP reſiduum BRKAPSE deprimet verſus baſin BE, puta ut jam ſit hujus reſidui *Centrum gravitatis* ad X; tunc adjunctum BRM + ESN adhuc totum MRKAPSN magis deprimet; adeóque centrum ejus infra X conſiſtet, velut ad Y. itaque conſtat Propoſitum.

V. *Circulum* AFB, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, ES *Diametro* CA occurrentes punctis T, S; & ad CA perpendiculares ſint rectæ BD, EP; ſit autem AD major quàm AP; erit TD. AD ⊏ SP. AP. Fig. 136.

Nam eſt CT. CA:: CA. CD. Ideoque CT − CA. CA − CD:: CT. CA, hoc eſt TA. AD:: CT. CA. Simili ratione conſtabit eſſe SA. AP:: CS. CA. Eſt autem CT. CA ⊏ CS. CA. quare TA. AD ⊏ SA. AP. vel componendo TD. AD ⊏ SP. AP.

VI. *Hyper-*

VI. *Hyperbolam* AEB, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, ES, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente; erit TD: AD ⊐ SP.AP.

Fig. 137.

Nam eſt CA. CD:: CT. CA. unde CA − CT. CD — CA::CT. CA; hoc eſt TA. AD:: CT. CA. ſuppare diſcurſu, eſt SA. AP:: CS. CA. Verùm eſt CT. CA ⊐ CS. CA. quare TA. AD ⊐ SA. AP; ſeu componendo TD. AD ⊐ SP. AP.

VII. *Circuli* AEB (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* AFB communes ſint axis AD, & baſis BD; ſit autem *paraboliformis* exponens $\frac{n}{m}$; & $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$ (vel $m-n.m-2n::CA.AD$) *circulum* verò tangat recta BT; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget.

Fig. 138.

Nam quia BT *circulum* tangit, eſt CT. CA:: CA. CD; unde TA. AD:: CA CD. componendoque TD. AD:: CA + CD. CD Item, quoniam eſt (ex hypotheſi) CA. AD:: $m-n.m-2n$; erit per rationis converſionem CA. CD:: $m-n.n$. & componendo CA + CD. CD:: $m.n$. hoc eſt TD. AD:: $m.n$. unde (a) palam fit, quòd BT *paraboliformem* AFB tangit.

(a) 2 *hujus ap.*

VIII. Subnotetur, quòd inversè, datâ ratione ipſius AD ad CA' deſignabitur hinc *paraboliformis*; quæ *Circulum* AEB ad B continget. Nempe, ſi $AD = \frac{s}{t}$, erit $\frac{t-s}{2t-s}$ dictæ *paraboliformis* exponens. Nam poſito fore $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$; erit ideò (juxta crucem multiplicando) $mt - ms = 2tn - sn$; & tranſponendo $mt - 2nt = ms - ns$. ac ideò (æqualitatem ad analogiſmum redigendo) $m-n.m-2n::t.s::CA.AD$. itaque conſtat ex antecedente Propoſitum.

IX. Manente quoad cætera ſeptimæ hypotheſi, *paraboliformis* AFB extra *circulum* AEB tota cadet.

Fig. 139.

Nam utcunque ducatur recta GEF ad DB parallela; quæ ſecet circulum ad E, paraboliformem in F; ductæque concipiantur rectæ ES *circulum*, & recta FR *paraboliformem* contingentes; Eſtque

RG.

RG.AG::(a) $m.n$::TD.AD(b) ⌐ SG.AG. quare RG ⌐ SG. unde (c) patet tota AFB extra circulum AEB jacere.

(a) 2. *hujus.*
(b) 5. *hujus ap.*
(c) 3. *hujus ap.*

X. Reliquis itidem ſtantibus, ſi ad baſin GE (utcunque parallelam ipſi DB) & axem AD conſtituta intelligatur *paraboliformis* ejuſdem cum ipſa AFB generis (nempe cujus etiam exponens $\frac{n}{m}$) illa ad partes A ſupra GE, extra *circulum* tota jacebit. Fig. 139.

Nam in arcu AE accepto quocunque puncto M, ductâque MP ad EG parallelâ, & MV circulum tangente; eſt VP. AP ⌐ SG. AG ⌐ RG.AG::$m.n$; (a) itaque rurſus liquet Propoſitum.

(a) 3. *hujus ap.*

XI. Conſectatur etiam dictam (ipſi AFB coordinatam & ad baſin GE conſtitutam) *paraboliformem* infra GE ad DB protractam, eatenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* ſtatim infra EG cadet ex eo patet, quòd ipſam tangens RE circulum ſecat (quia nempe SE circulum tangit). quòd alibi *Circulo* non occurret hinc patet; quoniam poſito quòd occurrat uſpiam ad N, (a) tota ſupra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac oſtenſum eſt.

(a) 3. *hujus ap.*

XII. Porrò, *Hyperbola* AEB (cujus centrum C) & *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$, communes ſint axis AD, baſis DB; ſit autem AD $= \frac{2n-m}{m-n}$ CA; & BT *hyperbolam* tangat; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget. Fig. 140.

Nam eſt CD.CA::CA.CT. ac indè AD.TA::CD.CA; inverſèq; componendo TD.AD::CA + CD.CD. Verùm ex hypotheſi, eſt $m-n.2n-m$::CA.CD; adeoque inversè componendo CA.CD::$m-n.n$; & rurſus componendo CA + CD. CD::$m.n$. hoc eſt TD.AD::$m.n$. unde BT *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rurſus datâ ratione ipſius AD ad CA, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens deſignabitur. nempe ſit AD $= \frac{s}{t}$CA; erit $\frac{n}{m} = \frac{t+s}{2t+s}$. Nam hoc ſuppoſito erit (σαυρηδὸν mul-

multiplicando) $2tn + sn = mt + ms$. vel transponendo $2nt - mt = ms - ns$. unde $m - n . 2n - m :: t . s ::$ CA. AD. ergò patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypotheſi, *paraboliformis* AFB intra hyperbolam AEB tota cadet.

Fig. 141. Nam utcunque ducatur EFG ad BD parallela; & recta ER *hyperbolam*, recta FS *paraboliformem* tangant. Eſtque SG. AG :: (*a*) $m . n ::$ TD. AD (*b*) $\sqsupset$ RG. AG. unde RG $\sqsubset$ SG. (*c*) unde curva AEB extra curvam AFB tota cadet.

(*a*) 2. *hujus ap.* (*b*) 6. *hujus ap.* (*c*) 3. *hujus ap.*

XV. Etiam, ſi reliquis perſtantibus, ad baſin GE, axin AG conſtitutam imagineris ejuſdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes ipsâ GE ſuperiores intra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141.

Nam ſi in *curva hyperbolica* AE ſumatur ubicunque punctum M, & ordinetur MP, ducatúrque hyperbolam tangens MV; erit VP. AP $\sqsubset m . n$. adeoque rurſus è tertia liquet Propoſitum.

XVI. Quinetiam ſi hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad baſin EG conſtituta, ad DB protracta concipiatur, ejus ipſis EG, BD intercepta pars extra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141.

Nam quòd extra *hyperbolam* infra EG cadit, exinde patet, quòd ipſa cum ipſius tangente recta ES angulum efficit minorem eo, quem eadem recta ES efficit cum recta RE hyperbolam tangente. Quòd autem eadem alibi, velut ad N, *hyperbolæ* non occurrit, patet; quoniam hoc poſito, (*a*) ipſa intra *hyperbolam* AN tota conſiſteret, contra quàm mox oſtenſum eſt.

(*a*) 3. *hujus ap.*

XVII. Habeant *Circulus* AEB, & *Parabola* AFB communem axem AD, & baſin DB; *parabola* ad partes ſupra BD intra *Circulum*; at infra BD extra *circulum* cadet.

Fig. 142.

Sit enim *Circuli Diameter* AZ, & ei æqualis AH ad BD parallela, & connectatur ZH; & huic BD producta ad I; ergo DI eſt *Parameter parabolæ* AFB. quòd ſi ſupra BD utcunque ducatur recta EFGK ad BD parallela circulum ſecans in E, parabolam in F, rectas AZ, HZ, in G, & K, patet eſſe $GEq = AG \times GK \sqsubset AG \times DI = GFq$. unde GE $\sqsubset$ GF. Item, ſi infra BD utcunque ducatur recta MNOL ad BD parallela *parabolam* ſecans in M, *circulum* in N, rectas AZ, HZ in O, & L, itidem patet eſſe $MOq = AO \times DI \sqsubset AO \times OL = NOq$. & ideò MO $\sqsubset$ NO.

$\sqsubset$ NO. quare liquent ea, quæ Propoſita ſunt.

Si *Circulo* ſubſtituatur *Ellipſis*, eadem concluſio valet idem diſcurſus probat; poſitâ AH *Ellipſis parametro.*

XVIII Habeant *hyperbola* AEB (cujus axis AZ, parameter AH) & *parabola* AFB axin eundem AD, & baſin DB, *parabola* ſupra DB tota extra *hyperbolam* cadet, extra verò, ſi infra DB protrahatur. Fig. 143.

Nam connexæ ZH occurrat BD in I, ergò DI eſt *parabolæ parameter.* Quòd ſi ſupra BD utcunque ducatur recta FEGK ad BD parallela, ſecans hyperbolam in E, parabolam in F, rectas AD, ZH punctis G, K, erit $FGq = AG \times DI \sqsubset AG \times GK = EGq$. quare $FG \sqsubset EG$. Quòd ſi infra BD, utcunque ducatur recta MNOL ſecans hyperbolam in N, parabolam in M, rectas AD, ZH in O, & L, erit $NOq = AO \times OL \sqsubset AO \times DI = MOq$. & indè $NO \sqsubset MO$. unde conſtant ea quæ propoſita ſunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ *ad Circuli dimenſionem pertinentes regulæ.* Sit BAE circuli portio, cujus axis AD, baſis BE; ſitque C centrum circuli, & EH ſinus rectus arcus BAE; item, ſit $AD = \frac{s}{t}CA$; erit 1. $\frac{2t-s}{3t-2s}AD \times BE \sqsubset$ port. BAE. Fig. 144.

2. $EH + \frac{4t-2s}{3t-2s}BH \sqsubset$ arc. BAE.

3. $\frac{2}{3}AD \times BE \supset$ port. BAE.

4. $EH + \frac{4}{3}BH \supset$ arc. BAE.

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbolæ dimenſionem ſpectantes regulæ.* Sit *hyperbola* (cujus centrum C) ſegmentum ADB, habens axin $AD = \frac{s}{t}CA$; & baſin DB; Fig. 145.

erit 1. $\frac{2t+s}{3t+2s}AD \times DB \supset$ ſegm. ADB. &

2. $\frac{2}{3}AD \times DB \sqsubset$ ſegm. ADB.

XXI. Porrò, ſit *circuli* (cujus centrum C) ſegmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem $A D = \frac{s}{t} C A$, & $H D = \frac{2t-s}{5t-3s} A D$; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; éſtque punctum (a) 2. *hujus ap.* H (a) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad baſin B E conſtitutæ, cujus exponens $\frac{t-s}{2t-s}$ &(b)quæ proinde circulum AEB (b) 8. *hujus ap.* tangit; (nam ſi $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t-s}{5t-3s} = \frac{m}{n+2m}$) & proinde H (a) erit centrum gravitatis *paraboliformis* iſti coordinatæ per O, P tranſeuntis, & ad baſin B E pertingentis. Hæc autem ſupra O (c) 10. *hujus ap* P (c) extra *circulum* cadit, & infra O P (d) intra ipſum; (e) adeóque (d) 11 *hujus ap* punctum H ſupra K ſitum eſt. (e) 4. *hujus ap.*

XXII. Sin punctum L ſit *centrum gravitatis parabolæ*, erit L infra Fig. 146. K ſitum; adeóque $K D \sqsubset \frac{2}{5} A D$. Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147. XXIII. Sit *Hyperbola* (cujus centrum C) *ſegmentum* B A E, cujus axis A D, baſis B E; gravitatis centrum K; ponatur autem $A D = \frac{s}{t} C A$, & $H D = \frac{2t+s}{5t+3s} A D$; erit H D minor ipsâ K D.

(a) 2. *hujus. ap.* Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (a). Eſtque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad baſin D B conſtitutæ, (b) 13. *hujus ap* cujus exponens $\frac{t+s}{2t+s}$; (b) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam ſi $\frac{t+s}{2t+s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t+s}{5t+3s} = \frac{m}{n+2m}$) (a) quare H erit centrum gravitatis paraboliformis iſti coordinatæ per O, P ductæ, & ad B E (c) 15. *hujus ap.* p ertingentis. hæc autem ſupra O P (c) intra hyperbolam cadit; (d) 16. *hujus ap* & infra O P (d) extra illam; (e) inde punctum K ſupra H (e) 4. *hujus ap.* exiſtit.

XXIV. Parabolæ centrum gr. (puta L) ſupra K exiſtit, adeóque $K D \sqsupset \frac{2}{5} A D$. Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Nè

XXV. Nè ſpeculatio præſens, *ob hujuſmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas*, aſpernanda videatur, adjungemus conſectarium unum vel alterum, quibus fortè ſolis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima, Minimaque* ſui generis innumera determinantur. Fig. 148.

Sit *Semicirculus* ABZ, cujus centrum C; ſitque *ſegmentum* ADB; & huic adſcripta *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{u}{m}$; ſit item $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc eſt recta, cujus aliqua poteſtas in poteſtatem ſegmenti axis, ſeu AD, ducta conficit *poteſtatem* ordinatæ, ceu DB) nominetur p; erit p in ſuo genere *maximum*.

Nam utcunque ducatur GE ad DB parallela, & ad GE poſita concipiatur *paraboliformis*, ipſi AFB coordinata, cujus *parameter* dicatur q. quum ergò *paraboliformis* AFB *circulum* extrorſum contingat, erit $GF \sqsubset GE$; adeóque $GF^m \sqsubset GE^m$; hoc eſt $p^{m-n} \times AG^n \sqsubset q^{m-n} \times AG^n$; quare $p \sqsubset q$.

Notandum eſt eſſe $p^{2m-2n} = ZD^m \times AD^{m-2n}$. & $q^{2m-2n} = ZG^m \times AG^{m-2n}$. unde $ZD^m \times AD^{m-2n} \sqsubset ZG^m \times AG^{m-2n}$. quare $ZD^m \times AD^{m-2n}$ eſt maximum.

Exemp. 1. Sit $n = 1$, & $m = 3$. erit ideò $p^4 = ZD^2 \times AD = ZDq \times BDq$; vel $p^2 = ZD \times BD$. Item $AD = \frac{1}{2} CA$.

2. Sit $n = 3$, & $m = 10$. erit $p^{14} = ZD^{10} \times AD^4$. vel $p^7 = ZD^5 \times AD^2 = ZD^3 \times BD^4$. & $AD = \frac{4}{7} CA$.

XXVI. Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis ZA; & huic inſcripta *paraboliformis* AFB cujus exponens $\frac{n}{m}$ *parameter* p; ſitque $AD = \frac{2n-m}{m-n} CA$; erit p ſui generis maximum. Fig. 149.

Nam utcunque ducatur EG ad BD parallela; & ad EG conſtituta intelligatur *paraboliformis*, ipſi AFB coordinata, cujus *parameter* q. quum ergo *paraboliformis* AFB *hyperbolam* introrſum contingat, erit $GF^m \sqsupset GE^n$; hoc eſt $p^{m-n} \times AG^n \sqsupset q^{m-n} \times AG^n$; quare $p \sqsupset q$.

Notandum

Notandum est esse $p^{2m-2n} = \frac{ZD^m}{AD^{2n-m}}$. & $q^{2m-2n} = \frac{ZG^m}{AG^{2n-m}}$. unde erit $\frac{ZD^m}{AD^{2n-m}} \sqsupset \frac{ZG^m}{AG^{2n-m}}$. quare $\frac{ZD^m}{AD^{2n-m}}$ est minimum.

Fig. 149.

Exemp. 1. Sit $n = 2$; & $m = 3$; erit $p^2 = \frac{ZD^3}{AD^3} = \frac{BD^3}{AD^3}$. & $p = \frac{BD^3}{ADq} = \frac{ZDq}{BD}$. Item AD = CA.

2. Sit $n = 3$; & $m = 4$; erit $p^2 = \frac{ZD^4}{AD^2}$ vel $p = \frac{ZD^2}{AD} = \frac{BD^4}{AD^3} = \frac{ZD^3}{BD^2}$. Item AD = 2 CA.

3. Sit $n = 5$, & $m = 8$; erit $p^6 = \frac{ZD^8}{AD^2}$. vel $p^3 = \frac{ZD^4}{AD} = \frac{BD^8}{AD^5} = \frac{ZD^5}{BD^2}$. Item $AD = \frac{2}{3}$ CA.

Quoniam in his *Cyclometriam* attigi, quid si obiter eò spectantia *Theoremata*, quæ ad manum, paucula subjunxero? præsternatur autem autem hoc καθολικὸν:

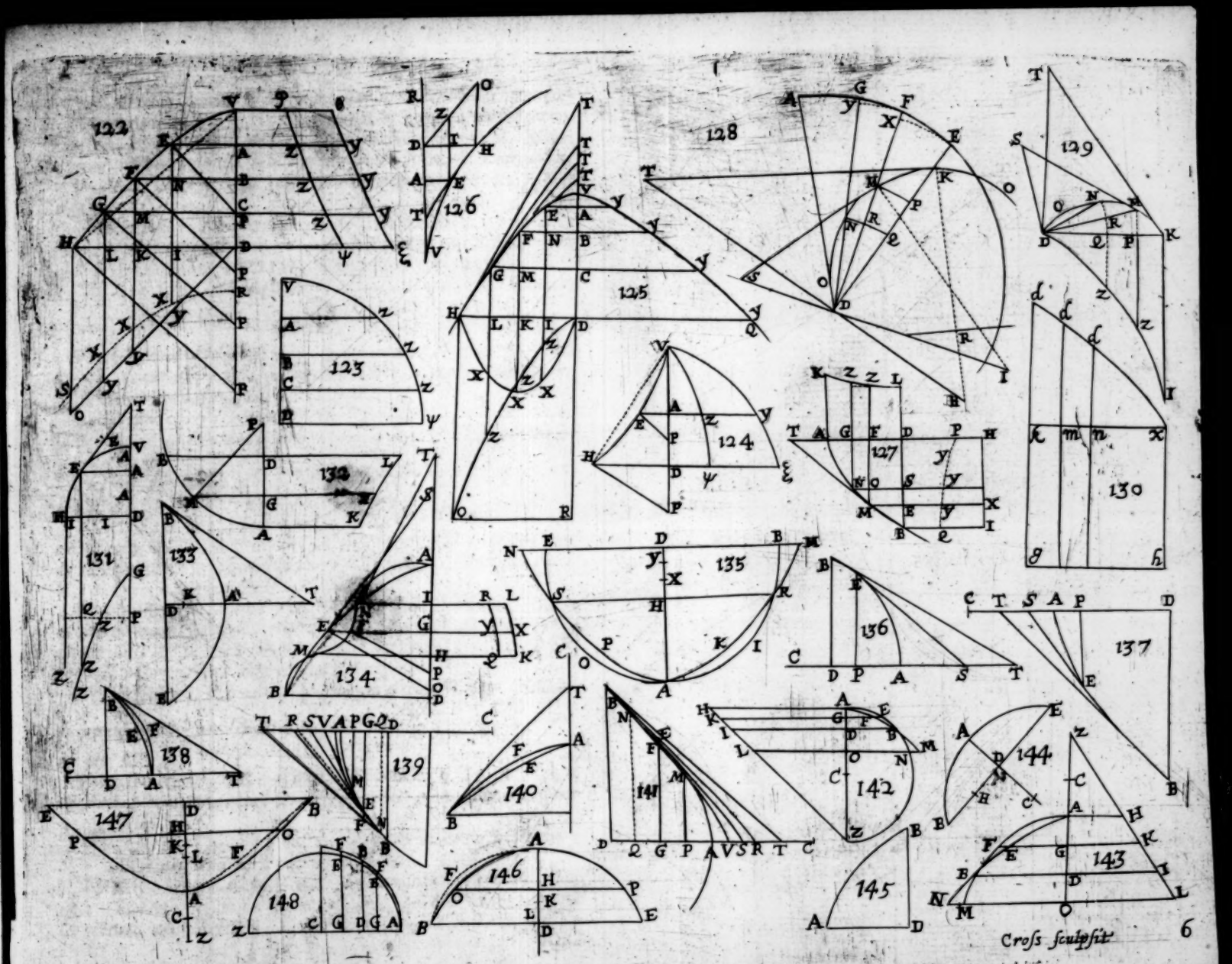
Fig. 150.

Sit curva quæpiam AGB, cujus axis AD, & ad hunc ordinatæ rectæ BD, GE; Habebit curva AB ad curvam AG majorem rationem quàm recta BD ad rectam GE.

Nam ducatur recta GH ad AD parallela: secentúrque recta BH punctis Y, & recta GE punctis Z in particulas indefinitè multas; pérque puncta Y, Z ducantur rectæ YM, YN, ZO, ZP ad AD parallelæ: curvam intersecantes punctis M, N, O, P; per quæ ducantur rectæ MR, NS, OT, PV ad BD parallelæ. Estque angulus BMY (ut è superiùs ostensis liquet) minor angulo NGS, undè MB.BY ⊏ GN.NS. Similíque de causa est NM.MR ⊏ GN.NS.* quare conjunctè est BM + MN + NG.BY + MR + NS ⊏ GN.NS; hoc est arc. GB.BH ⊏ GN.NS. rursus (è discursu consimili) ratio GN ad NS major est singulis rationibus QG ad GZ, OP ad PT, & AP ad PV; idcircoq; junctè est GN.NS ⊏, arc. AG.GE. quapropter erit GB.BH ⊏ AG.GE. permutandòque GB.AG ⊏ BH.GE. quare componendo est AB.AG ⊏ BD.GE.

* Vid. *Append.* Lect. XII.

XXVIII.


122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
Cross sculpsit.
6

XXVIII. Sit *Circulus* AMB, cujus *Radius* CA, & ad hunc perpendicularis recta DBE; ſit item curva ANE talis, ut ductâ utcunque rectâ PMN ad DE parallelâ (quæ circulum ſecet in M, dictam curvam in N) ſit recta PN æqualis *Arcui* AM; ſit demum *axe* AD, *baſe* DE deſcripta *Parabola* AOE, hæc extra curvam ANE tota cadet. Fig. 151

Nam ſecet recta PN parabolam in O; & connectantur ſubtenſæ AB, AM; eſtque DE. PN :: arc. AB. arc. AM ⊏ AB. AM :: DE. PO. quare PN ⊐ PO; unde liquet Propoſitum.

XXIX. Exhinc (& è vulgò notis *ſpatiorum* ADB, ADE *dimenſionibus*) facilè colligitur hæc regula: $\frac{3\,CA \times DB}{2\,CA + CD}$ ⊐ arc. AB. Fig. 152.

Porrò ſi ponatur arc. AB = 30 grad. ſitque 2 CA = 113; juxta regulam iſtam computando, proveniet *tota circumferentia* major quam 355, minus fractione unitatis.

XXX. Hinc etiam *dato arcu* AB, nominatiſque AB = p; CA = r; & DB = e, ad inveniendum *ſinum rectum* DB adhibebitur hæc æquatio; $\frac{3rrpp}{9rr+pp} = \frac{12rrp}{9rr+pp}e - ee$. vel ponendo $k = \frac{3rrp}{9rr+pp}$; erit $kp = 4ke - ee$. vel $2k - \sqrt{4kk - kp} = e$. Fig. 153.

XXXI. Sit AMB *Circulus*, cujus Radius CA, & huic perpendicularis recta DBE; ſit item curva ANE pars *Cycloidis* ad *Circulum* AMB pertinentis; demum ad axem AD, baſin DE ſtatuatur *Parabola* AOE; hæc intra *Cycloidem* tota cadet.

Etenim utcunque ducatur recta PMON ad DE parallela, lineas expoſitas ſecans, ut cernis; connectantúrque *ſubtenſæ* AB, AM; eſtque DE. PO :: AB. AM :: curv. AN ⊏ DE. PN; adeoque PO ⊐ PN. unde conſtat Propoſitum.

XXXII. Exhinc, & è *notis ſegmentorum circularis atque Cycloidalis dimenſionibus*, hæc elicitur *Regula* $\frac{2\,CA \times DB + CD \times DB}{CA + 2\,CD}$ ⊏ arc. AB.

Porrò ſi fuerit arc. AB = 30 grad. & ponatur 2 CA = 113; è regula hac conſectatur fore *totam circumferentiam* minorem quam 355, plus fractione.

Vides igitur ut è propoſitis duabus regulis ſtatim emergit *Diametri* ad *Circumferentiam Proportio Metiana*.

XXXIII. Quoniam exorbitanti ſe obviam dedit *Cyclois* hoc adnotabo *Theorema*, neſcio an uſpiam ab illis, qui de *Cycloide* tam fusè ſcripſerunt, animadverſum: Completo *Rectangulo* ADEG, *ſpatium* AEG

AEG æquatur *Circulari ſegmento* ADB demonſtrationem, ne longiùs evager, obmittam.

Fig. 154. XXXIV. Sint duo *circuli* AIMG, AKNH ſeſe contingentes ad A; communique diametro A H G, utcunque perpendicularis ducatur recta D N M: habebit *ſegmentum* A I M D ad *ſegmentum* AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam D N.

Nam ſit A R ad A G perpendicularis, ac ipſi A H æqualis; & connectatur H R, cui occurrat recta M D in X; ducatúrque recta G X S; tum ad axem A G *parametrum* A S per N deſcripta concipiatur *Ellipſis* A L N G; hæc (utì ſatis manifeſtum) intra arcum A K N tota cadet. Eſt autem ſegm. A I M D. ſegm. A L N D:: D M. D N. ergo ſegm. A I M D. ſegm. A K N D ⌐ DM. DN.

Fig. 154. XXXV. Sit Ellipſis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; ſit item recta DC axi majori Y Z parallela; & per D, F, C tranſeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipſis axe minore F T ſitum; dico circuli partem DOFPC intra ellipſis partem DMFNC jacere.

Nam ſit FI ad FV perpendicularis, & in hac ſumatur FS = FV; & connectatur V S, cui DC producta occurrat in X; & connexa T X ipſi FI occurrat in R. & cùm ſit G D q = F G × G V = F G × GX; liquet ipſam FR eſſe ellipſis, axi F T congruam, parametrum; unde conſtat Propoſitum.

Fig. 155. XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, ſegmentum DEC, & ſumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, ſit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad G E parallelâ, ſit R S. R M :: G E. G F; erit DMFC ellipſis, hoc modo determinata: Fiat E G. F G :: G L. G H; & per H erigatur YHZ ad DC parallela, ſitque HY par ipſi LE; erunt HY, HF ellipſis ſemiaxes.

Demonſtratum habetur à *Greg. à S. Vincentio*, L. IV. Prop. 154. *Corol.* Hinc ſegm. DEC. DMFC :: EG. F G.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC, quarum communis ſubtenſa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis G E ad axem G F.

Nam ſint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra; & fiat EG. FG :: GL. GH; & fiat YHZ ad HF perpendicularis, & ſit HY æqualis ipſi LE; tum ſemiaxibus HY, HF deſcripta concipiatur ellipſis YDMFCZ; è mox prædictis liquet ellipſin DMFC circulo DOFC circumduci. Eſt autem circulare ſegmentum DEC ad ſegmentum ellipticum DMFC, ut GE ad GF; quare ſegm. DEC ad ſegm circulare DOFC. rationem habet majorem, quàm GE ad GF; Quod. E. D.

LECT.

Lect. XII.

IN ſuſcepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decurtemus, verbíſque parcamus; obſervetur, in ſequentibus ubique *lineam* A B *curvam* eſſe (quales tractamus) quampiam; cujus *Axis* AD; huic applicatas omnes rectas B D, C A, M F, N G perpendiculares; & M E, N S, C B parallelas eſſe; *punctum* M liberè ſumi; *arcum* M N indefinitè parvum eſſe; rectam α C curvæ V B, α μ curvæ A M, μ ν *arcui* M N æquales eſſe; ad rectam α C applicatas ei perpendiculares eſſe. His præſtratis, *Præparatio Communis.*

I. Sit M P curvæ A B perpendicularis; & lineæ K Z L, α φ δ tales, ut F Z ipſi M P, & μ φ ipſi M F æquentur; erit *ſpatium* α C δ ipſi A D L K æquale. Fig. 156, 157.

Nam *Triangula* M R N, P F M ſimilia ſunt, adeoque M N. N R :: P M. M F. unde M N × M F = N R × P M, hoc eſt (ſubſtitutis æqualibus) μ ν × μ φ = F G × F Z; ſeu rectang. μ θ = rectang. F H; ſpatium verò α C δ minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia μ ϑ; & ſpatium A D L K totidem rectangulis, qualia F H, æquivalet. unde liquet Propoſitum.

II. Hinc, ſi curva A M B circa axem A D rotetur, habebit ſe *producta ſuperficies* ad *ſpatium* A D L K, ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto ſpatio A D L K cognoſcetur dicta *ſuperficies*. Conſequentiæ rationem jam anteà pridem aſſignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæræ*, *Sphæroidis* utriuſque, *Conoidúmque ſuperficies dimenſionem* accipiunt; nam ſi A D ſit conicæ ſectionis, à qua iſtæ figuræ oriuntur, axis; linea K Z L ſemper aliqua conicarum exiſtet, haud difficili negotio determinabilis. Hoc ſuggero tantùm, quoniam nunc evulgatum habetur.

IV. Iisdem stantibus, sit curva A Y I talis, ut ordinata F Y sit inter congruas F M, F Z proportione media; erit *solidum* ex spatio $\alpha\delta\zeta$ circa axem $\alpha\zeta$ rotato factum æquale *solido*, quod à *spatio* A D I circa axem A D converso procreatur. Fig. 156, 157.

Nam est M N. N R :: P M. M F :: P M × M F. M F q :: F Z × F M. M F q. unde M N × M F q = N R × F Z × F M; hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi q = NR \times FYq$. Unde liquet Propositum.

V. Simili ratione colligetur, si F Y ponatur inter F M, F Z *bimedia*, fore *summam cuborum* ex applicatis (quales $\mu\varphi$) à curva $\alpha\varphi\delta$ ad rectam $\alpha\zeta$, æqualem *summæ cuborum* ex explicatis à curva A Y I ad rectam A D. Fig. 156, 157. parique modo se res habebit quoad cæteras *potestates*.

VI. Porrò, stantibus reliquis, sit curva V X O talis, ut E X ipsi M P æquetur; & curva $\varpi\xi\downarrow$ talis, ut $\mu\xi$ æquetur ipsi P F; erit spatium $\alpha\varpi\downarrow\zeta$ æquale spatio D V O B. Fig. 156.

Nam est M N. M R :: M P. P F; adeoque M N × P F = M R × M P. hoc est $\mu\nu \times \mu\xi = ES \times EX$. vel rectang. E T = rectang. $\mu\sigma$. Unde liquet Propositum.

VII Subnotetur hoc: Si curva A B sit *Parabola*, cujus *Axis* A D, *parameter* R; erit curva V X O *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* DV, cujusque *parameter* axi R æquatur (scilicet ob $EXq = (PMq = PFq + FMq = \frac{Rq}{4} + FMq = \frac{Rq}{4} + DEq =) DVq + DEq$). item *spatium* $\alpha\zeta\downarrow\varpi$ erit *Rectangulum*; quoniam singulæ applicatæ $\mu\xi$ ipsi $\frac{R}{2}$ æquantur. Constat itaque dato *spatio hyperbolico* D V O B curvam A M B dari; & viciſſim. Hoc obiter. Fig. 156.

VIII. Adnotari posset etiam omnia simul quadrata ex applicatis ad rectam $\alpha\zeta$ à curva $\varpi\xi\downarrow$ æquari rectangulis omnibus ex P F, E X ad rectam D B applicatis (seu computatis); cubos ex $\mu\xi$ æquari ipsis P F q × E X; ac ità porrò. Fig. 157.

IX. Adjungatur etiam (productâ P M Q) si ponatur F Z æqualis ipsi P Q, & $\mu\varphi$ ipsi A Q; *spatium* $\alpha\zeta\delta$ *spatio* A D L K æquari. Fig. 157.

Nam

Nam ob MN. NR :: PM. MF :: PQ. QA; erit MN × QA = NR × QA; hoc eſt rectang. μθ = rectang. FH.

X. Porrò, curvam AB tangat recta MT, ſintque curvæ DXO, αφδ tales, ut EX æquetur ipſi MT, & μφ ipſi MF; erit ſpatium αCδ æquale *ſpatio* DXOB. Fig. 158.

Nam MN. MR :: MT. MF. quare MN × MF = MR × MT; hoc eſt μν × μφ = ES × EX; unde patet. 159.

XI. Hinc rurſus, *ſuperficies ſolidi ex ſpatii* AB D circa axem AD converſione progeniti ad *ſpatium* DXOB ſe habet, ut *Circuli Circumf.* ad *radium*; hoc igitur noto ſimul illa innoteſcet. unde rurſus *Sphæroidum*, *Conoidumque ſuperficies* dimetiri licebit. Fig. 158.

XII. Si linea DYI talis fuerit, ut ſit EY = √EX × MF; erit *ſolidum* ex *ſpatio* αCδ circa axem αC rotato factum æquale *ſolido*, *quod ex ſpatio* DBI circa axem DB rotato progignitur.

Etenim eſt MN. MR :: MT × MF. MFq :: EX × MF. MFq :: EYq. MFq. quare MN × MFq = MR × EYq. hoc eſt μν × μφq = ES × EYq. Fig. 158. 159.

XIII. Simili ratione *Cuborum* (*aliarumque poteſtatum*) ex ordinatis μφ *ſummas* cum *ſpatiis* ad rectam DB computatis licebit conferre.

XIV. Sint præterea lineæ AZK, αξψ tales, ut FZ ipſi MT, & μξ ipſi TF æquentur; *ſpatium* αCψ æquabitur *ſpatio* ADK.

Etenim MN. NR :: MT. TF; hoc eſt μν. FG :: FZ. μξ. quare μν × μξ = FG × FZ. Fig. 158. 159.

XV. Etiam *ſumma quadratorum* ex applicatis μξ æquatur *ſummæ Rectangulorum* ex TF, FZ; & *ſumma Cuborum* ex μξ æquantur ipſis TFq × FZ (ad rectam ſcilicet AD computationem exigendo) parique quoad cæteras poteſtates modò. Fig. 158, 159.

XVI. Rurſus ponatur recta QMP curvæ AMB perpendicularis; ſitque recta Cδ æqualis ipſi BD, & compleatur *Rectangulum* αCδζ; tum curva KZL talis ſit, ut FZ ipſi QP æquetur; erit *rectang.* αCδζ æquale *ſpatio* ADLK. Fig. 160, 161.

Nam eſt MN. NR :: (PM. MF ::) PQ. IF. quare MN × IF = NR × PQ; hoc eſt μν × μξ = FG × FZ. unde patet.

Hinc noto ſpatio AKLD cognoſcetur curvæ AMB quantitas.

Fig. 160, 161. XVII. Item, poſito rectam TMY contingere curvam AMB, factâque $\zeta\gamma = BC$, completóque *Rectangulo* $\alpha\zeta\gamma\downarrow$, ſit curva OXX talis, ut FX ipſi TY æquetur; erit *ſpatium* (infinitè protenſum) ADOXX æquale *Rectangulo* $\alpha\zeta\gamma\downarrow$.

Nam MN. NR :: YT. DA; hoc eſt $\mu\nu$. FG :: FX. $\mu\theta$. & $\mu\nu \times \mu\theta = FG \times FX$. quare liquet.

Hinc rurſus, explorato *ſpatio* ADOXX curva AMB innoteſcet.

Fig. 160, 161. XVIII. Quin adſumptâ quâpiam determinatâ R, & factâ rectâ $\zeta\delta = R$; ſi curva OXX talis ſit, ut MF. MP :: R. FX; erit *rectangulum* $\alpha\zeta\delta\zeta$ æquale *ſpatio* ADOXX. ac inde comperto hoc ſpatio, curva prorſus innoteſcet.

Nam MN. NR :: MP. MF :: FX. R. adeóque $MR \times R = NR \times FX$; ceu $\mu\nu \times \mu\xi = FG \times FX$.

Complura talia poſſent adponi; ſed vereor ut hæc nimis quam ſufficere videantur.

XIX. Adnotetur ſaltem, hæc omnia æquè vera fore, nec abſimiliter oſtendi, poſito curvæ AMB convexa rectam AD ſpectare.

XX. Ex oſtenſis autem *methodus* facilis emergit *curvas* (διαγραμματικὰς) *deſignandi*, quæ *dimenſionem* admittunt qualem qualem; nimirum ità procedas.

Fig. 162. Quamlibet (tibi quadantenùs notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis AK, DL; rectâ AD; & lineâ quâcunque KL *comprehenſam* accipe sîs. ad iſtam verò ſic referatur altera ADEC, ut ductâ quâcunque rectâ FH ad DL parallelâ (quæ ſecet lineas AD, CE, KL punctis F, G, H) adſumptâque rectâ determinatâ Z;

Fig. 163. ſit *quadratum* ex FH æquale *quadratis* ex FG, & Z. quinetiam ſit curva AIB talis, ut ad ipſam productâ rectâ GFI, ſit *rectangulum* ex Z, & FI æquale *ſpatio* AFGC; erit *rectangulum* ex Z, & *curva* AB æquale *ſpatio* ADLK.

Æquè procedit methodus, etiamſi recta AK ponatur infinita.

Fig. 162. *Exemp.* 1. Sit KL *recta linea*; erit curva CGE *Hyperbola*.

Fig. 163. 2. Sit linea KL *Arcus Circuli*, cujus *Centrum* D; & AK = Z

$= Z$; erit curva AGF *Circulus*; & curva AB $= \frac{AD}{2} + \frac{DL}{2AK}$ arc. KL.

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & *Axis* AK $= Z$; erit CGE recta linea; & curva AB *Parabola*. Fig. 164.

4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quædam. Fig. 163.

5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inversa, vel infinita (talis scilicet ut sit $FH = \sqrt{\frac{Z^1}{AF}}$) erit curva AB *Cycloïs*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipsi Z æquatur. Fig. 165.

Elegantiora forsan *Exempla* ipse circumspectans excogitabis.

APPENDI-

APPENDICULA I.

Hic demùm etsi præter institutum sit particularia nunc attingere; qualibus sanè, hæc generalia consequentibus, admodum proclive foret turgidum Volumen compingere (*amico tamen morem gerens operâ* dignum censenti) subtexam ad *Circuli Tangentes Secantésq*; spectantia nonnulla, pleraquè de suprà positis emergentia.

Præparatio Communis.

Fig. 166. Esto *cirtuli Quadrans* A C B, quam tangant rectæ A H, B G; & in productis H A, A C sumantur A K, C E singulæ pares *radio* C A; & *asymptotis* A C, C Z per K descripta sit *Hyperbola* K Z Z; *asymptotis* B C, B G per E *hyperbola* L E O. Sumatur etiam in arcu A B Fig. 167. *punctum arbitrarium* M, per quod ducantur recta C M S (tangenti A H occurrens in S) recta M T circulum tangens; recta M F Z ad B C parallela, recta M P L ad A C parallela. Sit denuò recta $\alpha\zeta$ æqualis *arcui* A B, & $\alpha\mu$ arcui A M; & rectæ $\alpha\gamma$, $\xi\mu$ $\pi\downarrow$ rectæ $\alpha\zeta$ perpendiculares; quarum $\alpha\gamma = AC$; $\mu\xi = AS$; $\mu\downarrow = CS$; $\mu\pi = MP$.

I. Recta C S æquatur rectæ F Z; adeoque *summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Est enim C F . C A :: (C M . C S ::) C A . C S. adeòque C F × C S = C Aq. item C F × F Z = C A × A K = C A q. ergo C S = F Z.

Fig. 167. II. *Spatium* $\alpha\mu\xi$ (hoc est *Summa tangentium in arcu* A M ad rectam $\alpha\mu$ applicatarum) æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Patet ex hujusce Lectionis 9. III.

III. Curva A X X talis ſit, ut P X ſecanti C S (vel C T) æquetur; *ſpatium* A C P X hoc eſt *Summa ſecantium ad arcum* A M pertinentium, & ad C B applicatarum) æquatur *duplo ſectori* A C M.

Nam (a) *ſpatium* A F M X *Segmenti* A F M *duplum* eſt; & *rectangulum* F C P M *Trianguli* F C M. ergò *totum ſpatium* A C P X totius *ſectoris* A C M duplum eſt. Fig. 166. (a) 10. Lect. XI.

Etiam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè conſtat.

IV. Curva C V V talis ſit, ut P V *Tangenti* A S æquetur; erit *ſpatium* C V P (hoc eſt *ſumma tangentium ad arcum* A M *pertinentium*, & ad rectam C B applicatarum) æquale *ſemiſſi quadrati ex ſubtenſa* A M. Fig. 166.

Manifeſtè conſectatur ex ſeptima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ C Q = C P; & ductâ Q O ad C E parallelâ (quæ *hyperbolæ* L E occurrat in O) erit *ſpatium hyperbolicum* P L O Q ductum in *radium* C B (ſeu *cylindricum* ad baſin P L O Q, altitudine B C (duplum *ſummæ quadratorum* ex rectis C S, ſeu P X ad *arcum* A M pertinentibus, & ad rectam C B applicatis. Fig. 166.

Nam quia P L. Q O :: (B Q. B P. hoc eſt::) B C + C P. B C — C P; erit componendo P L + Q O. Q O :: 2 B C. B C — C P. item eſt Q O. B C :: B C. B C + C P; ergò (pares rationes adjungendo) eſt P L + Q O. Q O + Q O. B C = 2 B C. B C — C P + B C. B C + C P; hoc eſt P L + Q O. B C :: 2 B C q. B C q — C P Q (hoc eſt::) 2 B C q. P M q. verùm eſt P X q. B C q :: B C q. P M q. vel (antecedentes duplando) 2 P X q. B C q :: 2 B C q. P M q. ergò P L + Q O. B C :: 2 P X q. B C q. vel P L × B C + Q O × B C. B C q :: 2 P X q. B C q. quare P L × B C + Q O × B C = 2 P X q. itaque B C in omnes P L + Q O ducta adæquat omnia totidem P X q. unde conſtat Propoſitum.

VI. Hinc ſpatium $\alpha\gamma\downarrow\mu$ (hoc eſt *ſumma ſecantium in arcu* A M ad $\alpha\mathfrak{C}$ applicatarum) æquatur *ſubduplo ſpatio hyperbolico* P L O Q. Fig. 167.

Nam ſumatur arcus M N indefinitè parvus, & huic æqualis recta $\mu\nu$, ducatúrque recta N R ad A C parallela. Eſtque M N. M R :: (M C. C F :: C S. C A :: P X. C A ::) P X q. P X × C A. adeóque M N × P X × C A = M R × P X q. ſeu $\mu\nu \times \mu\downarrow \times$ C A = M R × P X q. atqui (ex præcedente) omnium M R × P X q ſumma ſpatii P L O Q in C A ducti ſubdupla eſt. Ergò omnia totidem $\mu\nu \times \mu\downarrow$ in C A ducta eidem ſubduplo æquantur. quare ſpatium $\alpha\gamma\downarrow\mu$ (omnibus

AEG æquatur *Circulari ſegmento* ADB demonſtrationem, ne longiùs evager, obmittam.

Fig. 154. XXXIV. Sint duo *circuli* AIMG, AKNH ſeſe contingentes ad A; communique diametro A H G, utcunque perpendicularis ducatur recta D N M: habebit *ſegmentum* A I M D ad *ſegmentum* AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam D N.

Nam ſit A R ad AG perpendicularis, ac ipſi A H æqualis; & connectatur H R, cui occurrat recta M D in X; ducatúrque recta G X S; tum ad axem A G *parametrum* A S per N deſcripta concipiatur *Ellipſis* A L N G; hæc (utì ſatis manifeſtum) intra arcum A K N tota cadet. Eſt autem ſegm. A I M D. ſegm. A L N D:: D M. D N. ergo ſegm. A I M D. ſegm. A K N D ⊐ DM. DN.

XXXV. Sit Ellipſis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; ſit item
Fig. 154. recta DC axi majori Y Z parallela; & per D, F, C tranſeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipſis axe minore F T ſitum; dico circuli partem DOFPC intra ellipſis partem DMFNC jacere.

Nam ſit FI ad FV perpendicularis, & in hac ſumatur FS = FV; & connectatur V S, cui DC producta occurrat in X; & connexa T X ipſi FI occurrat in R. & cum ſit G D q = F G × G V = F G × GX; liquet ipſam FR eſſe ellipſis, axi F T congruam, parametrum; unde conſtat Propoſitum.

Fig. 155. XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, ſegmentum DEC, & ſumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, ſit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad G E parallelâ, ſit R S. R M :: G E. G F; erit DMFC ellipſis, hoc modo determinata: Fiat E G. F G :: G L. G H; & per H erigatur YHZ ad DC parallela, ſitque HY par ipſi LE; erunt HY, HF ellipſis ſemiaxes.

Demonſtratum habetur à *Greg. à S. Vincentio*, L. IV. Prop. 154. *Corol.* Hinc ſegm. DEC. DMFC :: EG. F G.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC, quarum communis ſubtenſa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis G E ad axem G F.

Nam ſint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra; & fiat EG. FG :: GL. GH; & fiat YHZ ad HF perpendicularis, & ſit HY æqualis ipſi LE; tum ſemiaxibus HY, HF deſcripta concipiatur ellipſis YDMFCZ; è mox prædictis liquet ellipſin DMFC circulo DOFC circumduci. Eſt autem circulare ſegmentum DEC ad ſegmentum ellipticum DMFC, ut GE ad GF; quare ſegm. DEC ad ſegm circulare DOFC. rationem habet majorem, quàm GE ad GF; Quod. E. D.

LECT.

LECT. XII.

IN ſuſcepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decurtemus, verbiſque parcamus; obſervetur, in ſequentibus ubique *lineam* A B *curvam* eſſe (quales tractamus) quampiam; cujus *Axis* AD; huic applicatas omnes rectas B D, C A, M F, N G perpendiculares; & M E, N S, C B parallelas eſſe; *punctum* M liberè ſumi; *arcum* M N indefinitè parvum eſſe; rectam α C curvæ V B, α μ curvæ A M, ν *arcui* M N æquales eſſe; ad rectam α C applicatas ei perpendiculares eſſe. His præſtratis, *Præparatio Communis.*

I. Sit M P curvæ A B perpendicularis; & lineæ K Z L, α φ δ tales, ut F Z ipſi M P, & μ φ ipſi M F æquentur; erit *ſpatium* α C δ ipſi A D L K æquale. Fig. 156, 157.

Nam *Triangula* M R N, P F M ſimilia ſunt, adeoque M N . N R :: P M . M F. unde M N × M F = N R × P M, hoc eſt (ſubſtitutis æqualibus) μ ν × μ φ = F G × F Z; ſeu rectang. μ θ = rectang. F H; ſpatium verò α C δ minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia μ δ; & ſpatium A D L K totidem rectangulis, qualia F H, æquivalet. unde liquet Propoſitum.

II. Hinc, ſi curva A M B circa axem A D rotetur, habebit ſe *producta ſuperficies* ad *ſpatium* A D L K, ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto ſpatio A D L K cognoſcetur dicta *ſuperficies*. Conſequentiæ rationem jam anteà pridem aſſignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæræ*, *Sphæroidis* utriuſque, *Conoidúmque ſuperficies dimenſionem* accipiunt; nam ſi A D ſit conicæ ſectionis, à qua iſtæ figuræ oriuntur, axis; linea K Z L ſemper aliqua conicarum exiſter, haud difficili negotio determinabilis. Hoc ſuggero tantum, quoniam nunc evulgatum habet ur.

IV. Iisdem stantibus, sit curva A Y I talis, ut ordinata F Y sit inter congruas F M, F Z proportione media; erit *solidum* ex spatio $\alpha\delta\zeta$ circa axem $\alpha\zeta$ rotato factum æquale *solido*, quod à *spatio* A D I circa axem A D converso procreatur. Fig. 156, 157.

Nam est M N. N R :: P M. M F :: P M × M F. M F q :: F Z × F M. M F q. unde M N × M F q = N R × F Z × F M; hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi q = NR \times FYq$. Unde liquet Propositum.

V. Simili ratione colligetur, si F Y ponatur inter F M, F Z *bimedia*, fore *summam cuborum* ex applicatis (quales $\mu\varphi$) à curva $\alpha\varphi\delta$ ad rectam $\alpha\zeta$, æqualem *summæ cuborum* ex explicatis à curva A Y I ad rectam A D. Fig. 156, 157. parique modo se res habebit quoad cæteras *potestates*.

VI. Porrò, stantibus reliquis, sit curva V X O talis, ut E X ipsi M P æquetur; & curva $\varpi\xi\downarrow$ talis, ut $\mu\xi$ æquetur ipsi P F; erit spatium $\alpha\varpi\downarrow\zeta$ æquale spatio D V O B. Fig. 156.

Nam est M N. M R :: M P. P F; adeoque M N × P F = M R × M P. hoc est $\mu\nu \times \mu\xi = ES \times EX$. vel rectang. E T = rectang. $\mu\sigma$. Unde liquet Propositum.

VII Subnotetur hoc: Si curva A B sit *Parabola*, cujus *Axis* A D, *parameter* R; erit curva V X O *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* DV, cujusque *parameter* axi R æquatur (scilicet ob E X q = (P M q = P F q + F M q = $\frac{Rq}{4}$ + F M q = $\frac{Rq}{4}$ + D E q =) D Vq + DEq). item *spatium* $\alpha\zeta\downarrow\varpi$ erit *Rectangulum*; quoniam singulæ applicatæ $\mu\xi$ ipsi $\frac{R}{2}$ æquantur. Constat itaque dato *spatio hyperbolico* DVOB curvam A M B dari; & viciſſim. Hoc obiter. Fig. 156.

VIII. Adnotari posset etiam omnia simul quadrata ex applicatis ad rectam $\alpha\zeta$ à curva $\varpi\xi\downarrow$ æquari rectangulis omnibus ex P F, E X ad rectam D B applicatis (seu computatis); cubos ex $\mu\xi$ æquari ipsis P F q × E X; ac ità porrò. Fig. 157.

IX. Adjungatur etiam (productâ P M Q) si ponatur F Z æqualis ipsi P Q, & $\mu\varphi$ ipsi A Q; *spatium* $\alpha\zeta\delta$ *spatio* A D L K æquari. Fig. 157.

Nam

Nam ob MN. NR :: PM. MF :: PQ. QA ; erit MN × QA = NR × QA ; hoc eſt rectang. μθ = rectang. FH.

X. Porrò, curvam AB tangat recta MT, ſintque curvæ DXO, αφδ tales, ut EX æquetur ipſi MT, & μφ ipſi MF ; erit ſpatium αCδ æquale *ſpatio* DXOB. Fig. 158. 159.

Nam MN. MR :: MT. MF. quare MN × MF = MR × MT ; hoc eſt μν × μφ = ES × EX ; unde patet.

XI. Hinc rurſus, *ſuperficies ſolidi ex ſpatii* ABD circa axem AD converſione progeniti ad *ſpatium* DXOB ſe habet, ut *Circuli Circumf.* ad *radium* ; hoc igitur noto ſimul illa innoteſcet. unde rurſus *Sphæroidum, Conoidumque ſuperficies* dimetiri licebit. Fig. 158.

XII. Si linea DYI talis fuerit, ut ſit EY = √EX × MF ; erit *ſolidum* ex *ſpatio* αCδ circa axem αC rotato factum æquale *ſolido, quod ex ſpatio* DBI circa axem DB rotato progignitur.

Etenim eſt MN. MR :: MT × MF. MFq :: EX × MF. MFq :: EYq. MFq. quare MN × MFq = MR × EYq. hoc eſt μν × μφq = ES × EYq. Fig. 158. 159.

XIII. Simili ratione *Cuborum* (*aliarumque poteſtatum*) ex ordinatis μφ *ſummas* cum *ſpatiis* ad rectam DB computatis licebit conferre.

XIV. Sint præterea lineæ AZK, αξψ tales, ut FZ ipſi MT, & μξ ipſi TF æquentur ; *ſpatium* αCψ æquabitur *ſpatio* ADK.

Etenim MN. NR :: MT. TF ; hoc eſt μν. FG :: FZ. μξ. quare μν × μξ = FG × FZ. Fig. 158. 159.

XV. Etiam *ſumma quadratorum* ex applicatis μξ æquatur *ſummæ Rectangulorum* ex TF, FZ ; & *ſumma Cuborum* ex μξ æquantur ipſis TFq × FZ (ad rectam ſcilicet AD computationem exigendo) parique quoad cæteras poteſtates modò. Fig. 158, 159.

XVI. Rurſus ponatur recta QMP curvæ AMB perpendicularis ; ſitque recta Cδ æqualis ipſi BD, & compleatur *Rectangulum* αCδζ ; tum curva KZL talis ſit, ut FZ ipſi QP æquetur ; erit *rectang.* αCδζ æquale *ſpatio* ADLK. Fig. 160, 161.

Nam eſt MN. NR :: (PM. MF ::) PQ. IF. quare MN × IF = NR × PQ ; hoc eſt μν × μξ = FG × FZ. unde patet.

Hinc noto ſpatio AKLD cognoſcetur curvæ AMB quantitas.

Fig. 160, 161. XVII. Item, poſito rectam TMY contingere curvam AMB, factâque $\zeta\gamma = BC$, completóque *Rectangulo* $\alpha\zeta\gamma\downarrow$, ſit curva OXX talis, ut FX ipſi TY æquetur; erit *ſpatium* (infinitè protenſum) ADOXX æquale *Rectangulo* $\alpha\zeta\gamma\downarrow$.

Nam MN. NR :: YT. DA; hoc eſt $\mu\nu$. FG :: FX. $\mu\theta$. & $\mu\nu \times \mu\theta = FG \times FX$. quare liquet.

Hinc rurſus, explorato *ſpatio* ADOXX curva AMB innoteſcet.

Fig. 160, 161. XVIII. Quin adſumptâ quâpiam determinatâ R, & factâ rectâ $\zeta\delta = R$; ſi curva OXX talis ſit, ut MF. MP :: R. FX; erit *rectangulum* $\alpha\zeta\delta\zeta$ æquale *ſpatio* ADOXX. ac inde comperto hoc ſpatio, curva prorſus innoteſcet.

Nam MN. NR :: MP. MF :: FX. R. adeóque MR × R = NR × FX; ceu $\mu\nu \times \mu\xi = FG \times FX$.

Complura talia poſſent adponi; ſed vereor ut hæc nimis quam ſufficere videantur.

XIX. Adnotetur ſaltem, hæc omnia æquè vera fore, nec abſimiliter oſtendi, poſito curvæ AMB convexa rectam AD ſpectare.

XX. Ex oſtenſis autem *methodus* facilis emergit *curvas* (διαγραμματικὰς) *deſignandi*, quæ *dimenſionem* admittunt qualem qualem; nimirum ità procedas.

Fig. 162. Quamlibet (tibi quadantenùs notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis AK, DL; rectâ AD; & lineâ quâcunque KL *comprehenſam* accipe sîs. ad iſtam verò ſic referatur altera ADEC, ut ductâ quâcunque rectâ FH ad DL parallelâ (quæ ſecet lineas AD, CE, KL punctis F, G, H) adſumptâque rectâ determinatâ Z; ſit *quadratum* ex FH æquale *quadratis* ex FG, & Z. quinetiam ſit curva AIB talis, ut ad ipſam productâ rectâ GFI, ſit *rectangulum* ex Z, & FI æquale *ſpatio* AFGC; erit *rectangulum* ex Z, & *curva* AB æquale *ſpatio* ADLK.

Fig. 163. Æquè procedit methodus, etiamſi recta AK ponatur infinita.

Fig. 162. *Exemp.* 1. Sit KL *recta linea*; erit curva CGE *Hyperbola*.

Fig. 163. 2. Sit linea KL *Arcus Circuli*, cujus *Centrum* D; & AK = Z

$= Z$; erit curva AGF *Circulus*; & curva AB $= \frac{AD}{2} + \frac{DL}{2AK}$ arc. KL.

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & *Axis* AK $= Z$; erit CGE recta linea; & curva AB *Parabola*. Fig. 164.

4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quædam. Fig. 163.

5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inversa, vel infinita (talis scilicet ut sit $FH = \sqrt{\frac{Z^2}{AF}}$) erit curva AB *Cycloïs*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipsi Z æquatur. Fig. 165.

Elegantiora forsan *Exempla* ipse circumspectans excogitabis.

APPENDI-

APPENDICULA I.

HIc demùm etsi præter institutum sit particularia nunc attingere; qualibus sanè, hæc generalia consequentibus, admodum proclive foret turgidum Volumen compingere (*amico tamen morem gerens operâ* dignum censenti) subtexam ad *Circuli Tangentes Secantesq;* spectantia nonnulla, pleraque de suprà positis emergentia.

Præparatio Communis.

Fig. 166. Esto *cirtuli Quadrans* A C B, quam tangant rectæ A H, B G; & in productis H A, A C sumantur A K, C E singulæ pares *radio* C A; & *asymptotis* A C, C Z per K descripta sit *Hyperbola* K Z Z; *asymptotis* B C, B G per E *hyperbola* L E O. Sumatur etiam in arcu A B Fig. 167. *punctum arbitrarium* M, per quod ducantur recta C M S (tangenti A H occurrens in S) recta M T circulum tangens; recta M F Z ad B C parallela, recta M P L ad A C parallela. Sit denuò recta $\alpha\zeta$ æqualis *arcui* A B, & $\alpha\mu$ arcui A M; & rectæ $\alpha\gamma$, $\xi\mu$ $\pi\downarrow$ rectæ $\alpha\zeta$ perpendiculares; quarum $\alpha\gamma = AC$; $\mu\xi = AS$; $\mu\downarrow = CS$; $\mu\pi = MP$.

I. Recta C S æquatur rectæ F Z; adeoque *summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Est enim C F. C A :: (C M. C S ::) C A. C S. adeòque C F × C S = C Aq. item C F × F Z = C A × A K = C A q. ergo C S = F Z.

Fig. 167. II. *Spatium* $\alpha\mu\xi$ (hoc est *Summa tangentium in arcu* A M ad rectam $\alpha\mu$ applicatarum) æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Patet ex hujusce Lectionis 9. III.

III. Curva A X X talis ſit, ut P X ſecanti C S (vel C T) æquetur; *ſpatium* A C P X hoc eſt *Summa ſecantium ad arcum* A M pertinentium, & ad C B applicatarum) æquatur *duplo ſectori* A C M.

Nam (a) *ſpatium* A F M X *Segmenti* A F M *duplum* eſt; & *rectangulum* F C P M *Trianguli* F C M. ergò *totum ſpatium* A C P X totius *ſectoris* A C M duplum eſt. Fig. 166. (a) 10. Lect. XI.

Etiam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè conſtat.

IV. Curva C V V talis ſit, ut P V *Tangenti* A S æquetur; erit *ſpatium* C V P (hoc eſt *ſumma tangentium ad arcum* A M *pertinentium*, & ad rectam C B applicatarum) æquale *ſemiſſi quadrati ex ſubtenſa* A M. Fig. 166.

Manifeſtè conſectatur ex ſeptima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ C Q = C P; & ductâ Q O ad C E parallelâ (quæ *hyperbolæ* L E occurrat in O) erit *ſpatium hyperbolicum* P L O Q ductum in *radium* C B (ſeu *cylindricum* ad baſin P L O Q, altitudine B C (duplum *ſummæ quadratorum* ex rectis C S, ſeu P X ad *arcum* A M pertinentibus, & ad rectam C B applicatis. Fig. 166.

Nam quia P L. Q O :: (B Q. B P. hoc eſt::) B C + C P. B C — C P; erit componendo P L + Q O. Q O :: 2 B C. B C — C P. item eſt Q O. B C :: B C. B C + C P; ergò (pares rationes adjungendo) eſt P L + Q O. Q O + Q O. B C = 2 B C. B C — C P + B C. B C + C P; hoc eſt P L + Q O. B C :: 2 B C q. B C q — C P Q (hoc eſt::) 2 B C q. P M q. verùm eſt P X q. B C q :: B C q. P M q. vel (antecedentes duplando) 2 P X q. B C q :: 2 B C q. P M q. ergò P L + Q O B C :: 2 P X q. B C q. vel P L × B C + Q O × B C. B C q :: 2 P X q. B C q. quare P L × B C + Q O × B C = 2 P X q. itaque B C in omnes P L + Q O ducta adæquat omnia totidem P X q. unde conſtat Propoſitum.

VI. Hinc ſpatium $\alpha\gamma\psi\mu$ (hoc eſt *ſumma ſecantium in arcu* A M ad αC applicatarum) æquatur *ſubduplo ſpatio hyperbolico* P L O Q. Fig. 167.

Nam ſumatur arcus M N indefinitè parvus, & huic æqualis recta $\mu\nu$, ducatúrque recta N R ad A C parallela. Eſtque M N. M R :: (M C. C F :: C S. C A :: P X. C A ::) P X q. P X × C A. adeóque M N × P X × C A = M R × P X q. ſeu $\mu\nu \times \mu\psi \times C A = M R \times P X q$. atqui (ex præcedente) omnium M R × P X q ſumma ſpatii P L O Q in C A ducti ſubdupla eſt. Ergò omnia totidem $\mu\nu \times \mu\psi$ in C A ducta eidem ſubduplo æquantur. quare ſpatium $\alpha\gamma\psi\mu$ (omnibus

nibus $\mu\nu \times \mu\downarrow$ par) æquatur ſubduplo ſpatii PLOQ.

Fig. 167. VII. Omnia quadrata ex rectis $\mu\downarrow$ (ad rectam $\alpha\mu$ applicais) æquant CA × CP × PX (hoc eſt *parallelipipedum Baſe Rectangulo* ACPD, *Altitudine* CS).

Hujus *Effati demonſtrationem* (quanquam περίεργον) tranſilio; quoniam aliud *Schema* diſcurſúmque præ reliquis pleriſque longiuſculum expoſcit; neque rem tanti video.

Fig. 166. VIII. Curva AYY talis ſit, ut FY æquetur ipſi AS; ductâ tum rectâ YI ad AC parallela, erit etiam *ſpatium* ACIYYA (hoc eſt *ſumma Tangentium* ad *arcum* AM pertinentium, & ad rectam AC applicatarum, unà cum *rectangulo* FCIY) æquale *ſubduplo ſpatio hyperbolico* PLOQ.

(a) 1. Lect. XII. Nam *ſpatium* $\alpha\gamma\varpi\mu$ (a) æquatur *rectangulo* ACPD; hoc eſt *rectangulo* FCIY (nam eſt CA. AS :: CF. FM, vel CA. FY :: CF. CP. adeoq; CA × CP = FY × CF). item ſpatium $\gamma\varpi\downarrow$ (hoc eſt omnes

(b) 14. Lect. XII. rectæ TF ad $\alpha\zeta$ applicatæ, quotquot ad arcum AM pertinent) (b) æquatur *ſpatio* AFY; ergo *ſpatium* ACIYA æquatur *ſpatio* $\alpha\gamma\downarrow\mu$; hoc eſt (ut mox oſtenſum) *ſemiſſi ſpatii hyperbolici* PLOQ.

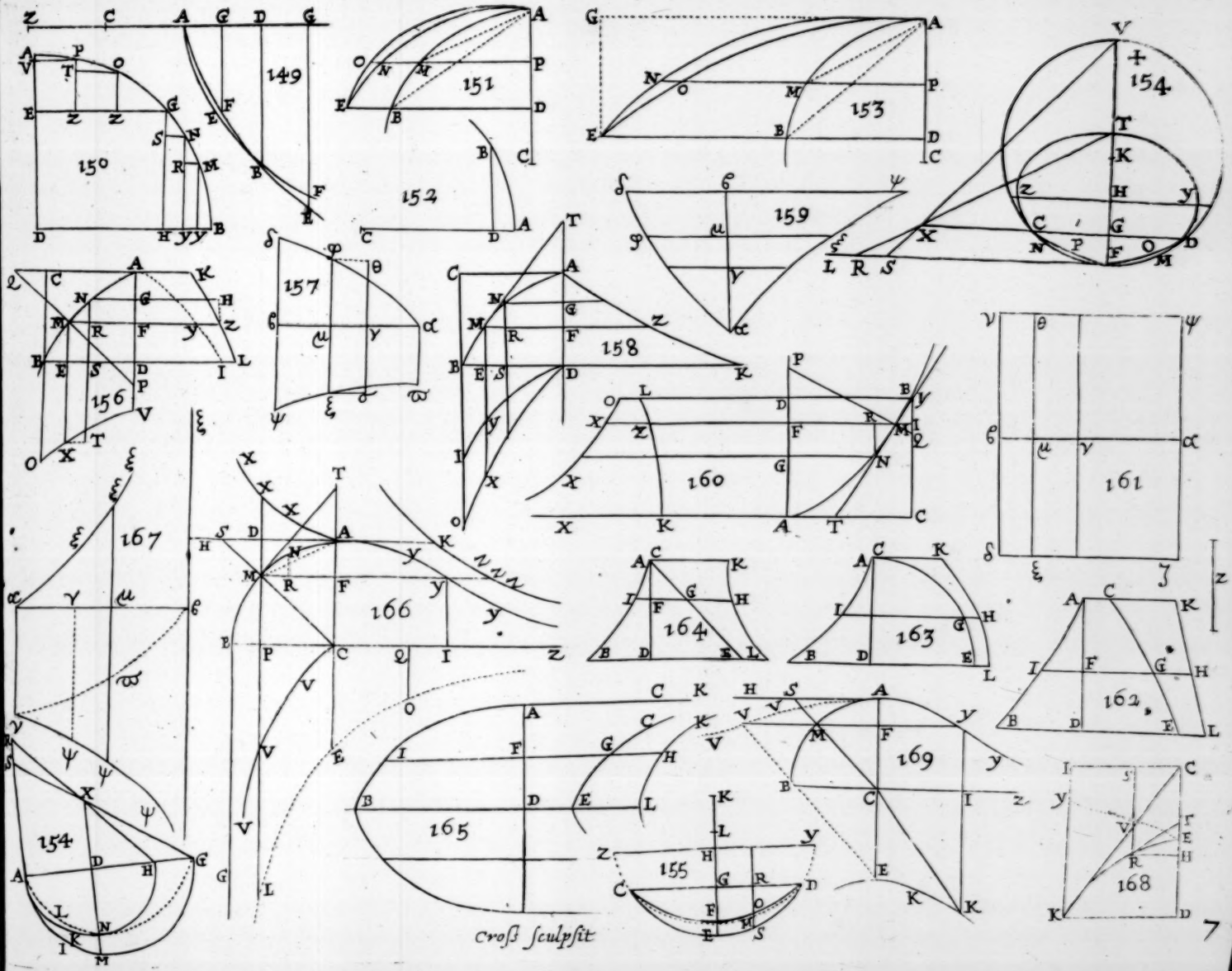
Aliter illud, (eique connexa) dimenſus ſum, *hoc præmiſſo Lemmate.*

Fig. 168. IX. Sit *Hyperbola æquilatera* (axes nempe pares habens) ERK ad cujus axes CED, CI; & ad hos ordinatæ KI, KD; ſit item curvâ EVY talis, ut in *hyperbola* liberè ſumpto puncto R, ductâque recta RVS ad DC parallelâ, ſint SR, CE, SV continuè proportionales; connexâ rectâ CK, erit *Spatium* CEYI *Sectoris hyperbolici* KCE duplum.

Nam ducatur RT *hyperbolam* tangens, & RH ad CI parallela. Eſtque CH. CE :: CE. CT. quare CT = SV; vel HT = RV. itaque *Spatium* EDKY duplum eſt *ſegmenti* EDK. item *rectangu-*

10. Lect. XI. *lum* IKDC *trianguli* CDK duplum eſt; ergo *reliquum ſpatium* CEYI *reliqui ſectoris* ECK duplum eſt.

Fig. 169. X. Reſumptâ jam quadrante circulari ACB, ſit CE = CA; & axe AE, *parametro* etiam AE, deſcripta ſit *Hyperbola* EKK; poſitóque curvam AYY talem eſſe, ut ordinatâ quâcunque rectâ MFY, ſit FY tangenti AS æqualis; ducatur recta YIK (rectam CZ,


149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
Cross sculpsit
7

C 2 ſecans in I, *hyperbolam* in K) & connectatur C K ; erit ſpatium A C I Y A *ſectoris hyperbolici* E C K duplum.

Nam eſt C Iq. C Aq :: A Sq. C Aq :: F Mq. C Fq :: C Aq — C Fq. C Fq. componendoque : C Iq -|- C Aq . C Aq :: C Aq. C Fq. hoc eſt (ex *hyperbolæ* natura) I Kq. C Aq :: C Aq. C Fq. vel I K. C E :: C E. I Y. itaque *ſpatium* A C I Y A *ſectoris* E C K duplum eſſe perſpicuum eſt è præcedente. Fig. 169.

XI. *Coroll.* Hinc ſi *Polo* E, *Chordâ* C B, *Sagittâ* C A deſcripta ſit *Conchois* A V V, cui occurrat Y F M producta in V ; erit M V = F Y ; adeóque *ſpatium* A M V *ſpatio* A F Y æquatur.

XII. Unde *ſpatiorum* ejuſmodi *Conchoidalium dimenſiones* innoteſcunt.

XIII. Neſcio, an *operæ* ſit hoc adjicere *Corollarium.*

XIII. Sit recta A E rectæ R S perpendicularis ; & C E = C A ; ſintque duæ (ſibimet inverſæ) *Conchoides* A Z Z, E Y Y ad eundem *polum* E, *communémque regulam* R S deſcriptæ, ab E verò ducatur utcunque recta E Y Z (lineas interſecans, ut vides) ſit etiam *hyperbole æquilatera*, E K K, cujus *centrum* C, *ſemiaxis* C E ; duc&âque I K ad A E parallelâ, connectatur C K, erit *ſpatium quadrilineum* A E O Y Z P A (rectis A E, Y Z, & *conchis* E O Y, A P Z comprehenſum) æquale *quadruplo ſectori Hyperbolico* E C K. Fig. 170.

Nam ſi *centro* E per C ducatur *arcus circularis* C X ; è dictis facilè colligetur *ſpatium* A P Z I C æquari *duplo ſectori Hyperbolico* E C K unà cum *ſectore circulari* C E X. item *ſpatium* E O Y I C æquari *duplo ſectori* E C K, *dempto ſectore* C E X.

Ità quoque facile colligas. Ducantur Z F, Y G ad C S parallelæ ; & protrahantur G Y L, L I H. ac ob I Y = I Z, eſt F Z + G Y = 2 C I. & *trapezium* F G Y Z = *rectang.* E G L H = 2 C G × C I. ergò patet.

Adnotari poteſt, ſi lubet, ductâ A T ad C S parallelâ, protractâque E Z T, ſi ponatur N = 2 triang. C E I — 2 ſect. E C K ; fore ſpat E Z T -|- E O Y E = 2 N.

Nempe N -|- C X I = ſpat. A Z T. & N — C X I = ſpat. E O Y E.

XIV. Adjiciemus etiam hiſce cognatam *Ciſſoidalis ſpatii* dimenſionem.

Sit *Semicirculus* A M B (cujus centrum C) quem tangat recta A H ; eique congruens *Ciſſois* A Z Z cujus ſcilicet hæc proprietas eſt, Fig. 171.

Fig. 171. ut in *circumf.* A M B ſumpto utcunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ B M Z, ductâque rectâ M F Z, quæ curvam A Z Z ſecet in Z, ſit M Z = A S) in recta verò $\alpha\zeta$ ſumatur $\alpha\mu$ æqualis arcui A M, & ad $\alpha\mu$ applicentur rectæ perpendiculares $\mu\xi$ æquales *arcuum* A M *ſinubus verſis* A F; erit *ſpatium trilineum* M A Z *ſpatii* $\alpha\mu\xi$ *duplum.*

Nam ſumatur *arcus* M N indefinitè parvus, & ei æqualis $\mu\nu$; ducatúrque recta N R ad A B parallela, connectatúrque recta C M. Eſtque jam A S. A B (2 C M) :: (F M . F B ::) A F . F M. & 2 C M. 2 M N :: C M . M N ::) F M . N R. quapropter erit ex æquo A S. 2 M N :: A F . N R; & ideò N R × A S = 2 M N × A F. hoc eſt N R × M Z = 2 $\mu\nu \times \mu\xi$. unde *ſpatium* M A Z *duplo ſpatio* $\alpha\mu\xi$ æquatur.

Hinc cum *ſpatii* $\alpha\mu\xi$ dimenſio vulgò nota ſit, & è ſuprà poſitis
Fig 172. etiam facilè deducatur; habetur *ſpatii ciſſoidalis* M A Z *dimenſio.* calculum ineat qui volet.

Iſta claudet hoc *Conſectariolum*:

XV. Sit *circuli quadrans* A C B, *circulúmque* tangant A H, B G;
Fig. 173. ſintque curvæ K Z Z, L E O *hyperbolæ*, eædem quæ (*a*) ſuperiùs. arcus verò ſumptus A M in partes diviſus concipiatur indefinitè multas
(*a*) 7, & 12. punctis N; per quæ trajiciantur radii C N; & his occurrant rectæ N X ad puncta X; *ſumma rectarum* N X (in radiis) æquatur ſpatio $\frac{\text{A F Z K}}{\text{Rad.}}$; & *ſumma rectarum* N X (in parallelis ad A S) æquatur *ſpatio* $\frac{\text{P L Q O}}{\text{3 Rad.}}$.

Nam triangulum X M N triangulo S A C ſimile eſt; & inde X M. M N :: A S. C A. & X N. M N :: C S. C A. unde $\text{X M} = \frac{\text{M N} \times \text{A S}}{\text{C A}}$; & $\text{X N} = \frac{\text{M N} \times \text{C S}}{\text{C A}}$. & ità in reliquis; unde liquet Propoſitum, ex 2, & 7 harum.

APPEN-

APPENDICULA 2.

BRevitati ſimul ac perſpicuitati (huic autem præcipuè) conſulentes præcedentia recto diſcurſu comprobata dedimus; quali non modò veritas, opinor, ſatis firmatur, at ejuſdem origo limpidiùs appareret. Verùm nè quis, minùs hujuſmodi ratiociniis adſuetus, hæreat, iſta paucula ſubdemus, quibus tales diſcurſus communiantur, quorumque ſubſidio non difficilè conficiantur *Propoſitorum demonſtrationes apagogicæ.*

I. Sint quotlibet *rationes* A ad X, B ad Y, C ad Z, ſingulæ deſignatâ quâpiam ratione R ad S majores; erit *omnium antecedentium* (ſimul acceptarum) ad *omnes conſequentes ratio* major ratione R ad S.

A . X .	A . M .
B . Y .	B . N .
C . Z .	C . O .

Nam ſint rationes A ad M, B ad N, C ad O ſingulæ æquales rationi R ad S. ergò X ⊐ M; & Y ⊐ N; ac Z ⊐ O. patet igitur fore A + B + C. X + Y + Z ⊏ A + B + C. M + N + O. hoc eſt A + B + C. X + Y + Z ⊏ R. S.

II. Hinc patet, ſi quotlibet rationes ſingulæ deſignabili quâcunque majores ſint, *antecedentium ſummam ad ſummam conſequentium* etiam deſignabili quâcunque majorem rationem habere.

III. Sit curva quævis A D B, cujus axis A D, & ad hunc applica- Fig. 174.

ta recta B D; curvam verò tangat recta B T; ſitque B P rectæ B D
Fig. 174. particula indefinitè parva; ducatúrque recta P O ad D T parallela, curvam ſecans ad N; dico P N ad N O rationem habere majorem quâvis deſignabili, puta quàm R ad S.

Nam ſit D E. E T :: R S; connexaque recta B E curvam ſecet in G, rectam P O in K; per G verò ducatur F H ad D A parallela. quoniam igitur B P ponitur indefinitè parva, eſt B P ⊐ B F; adeóq; P K ⊐ P N (nam ſubtenſa B G intra curvam tota cadit). ergò P N. N O ⊏ P K. K O :: D E. E T :: R. S.

IV. Hinc, ſi baſis D B in partes ſecetur indefinitè multas ad puncta Z; & per hæc ducantur rectæ ad D A parallelæ curvam ſecantes punctis E, F, G; per hæc verò ducantur *Tangentes* B Q, E R, F S, G T parallelis Z E, Z F, Z G, D A occurrentes punctis Q, R, S, T; habebit recta A D ad omnes interceptas E Q, F R, G S, A T (ſimul ſumptas) rationem quàvis aſſignabili majorem.

Nam ducantur rectæ E Y, F X, G V ad B D parallelæ. Habent
Fig. 175. igitur rectæ Z E, Y F, X G, V A ad rectas E Q, F R, G S, A T (ſingulæ ad ſingulas ſibi in directum poſitas reſpectivè) rationem deſignabili quâcunque majorem. ergò ſimul omnes iſtæ ad has ſimul omnes *rationem* habent deſignabili quâvis *majorem*; hoc eſt recta AD ad EQ -|- FR -|- GS -|- AT ejuſmodi rationem habet.

V. Hinc inter computandum, omnes E Q, F R, G S, A T ſimul acceptæ nihilo æquivalent; ſeu rectæ Z E, Z Q; & Z F, Y R, &c. æquantur; item tangentium particulæ B Q, E R, &c. reſpectivis *curvæ* portiunculis B E, E F, &c. pares, & quaſi coincidentes haberi poſſunt. quin & adſumere tuto licet, quæ evidentèr his cohærent.

VI. Sit porrò *curva* quævis A B, cujus *Axis* A D, & ad hunc
Fig. 176. applicata D B; æquiſecetur autem D B in partes indefinitè multas ad puncta Z, per quæ ducantur rectæ ad A D parallelæ, curvam A B interſecantes punctis X; quibus occurrant per ipſa X ductæ ad B D parallelæ rectæ M E, N F, O G, P H; ſit autem ſegmento A D B (rectis A D, D B, & curvâ A B comprehenſo) *circumſcripta figura* A D B M X N X O X P X R A major *ſpatio* quodam S; dico *ſegmentum* A D B non eſſe minus quàm S.

Nam ſi fieri poteſt ſit A D B minus quàm S exceſſu *rectangulum* A D L K adæquante. & quoniam A R eſt indefinitè parva, adeóque minor quàm A K, liquet rectangulum A D Z R minus eſſe *rectangulo* A D L K.

ADLK. item patet *ſegmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADZR majus eſſe *figurâ circumſcriptâ* (etenim *rectangulum* ADZR *rectangulis* RH, PG, OF, NE, MZ æquatur, proindéque majus eſt *trilineis* AXR, XXP, XXO, XXN, XBM). ergo *ſegmentum* ADB una cum *rectangulo* ADLK multo majus eſt *figurâ circumſcriptâ*; hoc eſt, *ſpatium* S majus eſt *figurâ circumſcriptâ*, contra *Hypotheſin*. Fig. 176.

VII. Item, ſi ponatur *figura inſcripta* HXGXFXEXZDH minor *ſpatio quodam* S; dico *ſegmentum* ADB non eſſe majus quàm S.

Nam ſi majus eſſe velis, eſto rurſum *exceſſus* par *rectangulo* ADLK; quod utique (ſicut prius) majus erit *rectangulo* ADZR. Eſt autem *ſegmentum* ADB, dempto *rectangulo* ADZR, minus figurâ inſcriptâ. ergò ſegmentum ADB, dempto rectangulo ADLK, multo minus ſit inſcriptâ figurâ; hoc eſt *ſpatium* S minus eſt inſcriptâ figurâ, contra *Hypotheſin*.

VIII. Hinc, ſi *ſpatium* quodcunque fuerit, (puta S) cui circumſcripta figura æquetur *figuræ* ADBMNOPRA; nec non cui *inſcripta figura æquetur figuræ* HGFEZDH; palàm eſt *ſpatium* iſtud S *ſegmento* ADB exæquari.

Nam (utì mox oſtenſum) hoc illo majus eſſe nequit, aut minus.

Poterunt autem hæc ad *alios circumſcriptionis* ac *inſcriptionis modos* accomodari. ſuffecerit innuiſſe.

Conicorum Superficies dimetiendi Methodus.

SIt *curva* quæpiam AMB, cujus *Axis* AD, & in hoc ſignatum punctum C; ad ipſum verò ordinata recta BD. à puncto quopiam M in curva ſumpto ducatur recta ME curvam tangens, & à C demittatur CG ad ME perpendicularis; ſit item determinata recta CV ad planam DAB rectà, & connectatur VG (erit VG ipſi MG perpendicularis; nam ſi ducatur CH ad GM parallela, liquet CH plano GVG rectam eſſe, adeoque GM eidem recta erit) Porrò ſit linea RS talis, ut ductâ rectâ MIX ad AD parallelâ (quæ ſecet ordinatam Fig. 177.

dinatam B D in I, & lineam R S in X) ſit M P . M E :: V G . I X; vel, ſit linea A L talis, ut ductâ M P Y ad B D parallelâ (quæ ſecet axem A D in P, & lineam A L in Y) ſit P E . M E :: V G . P Y; erit
Fig. 177. tunc utrumque *ſpatium* (ſingillatim) B R S D, vel A D L duplum *ſuperficiei conicæ*, quod ex recta per V & curvam A M B mota progeneratur.

Nam ſumatur M N indefinita curvæ particula; & per N ducantur rectæ N O K T ad ipſam A D, & N Q Z ad B D parallelæ (quæ lineas expolitas, ut *Schema* monſtrat, ſecent) connectantúrque rectæ V M, V N. eſtque M O . M N :: M P . M E :: V G . I X. quare M N × V G = M O × I X = I K × I X. Item eſt N O . M N :: P E . M E :: V G . P Y. unde M N × V G = N O × P Y = Q P × P Y. Eſt autem M N × V G duplum trianguli M V N. quapropter tam I K × I X, quàm Q P × P Y duplum eſt *trianguli* M V N. pariter autem ubique ſit. ergò conſtat Propoſitum.

Exemplum.

Fig. 177. Sit curva A M B *hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* C, ſitque C V = C A = *r*. & C P = *x* (nam hujuſmodi *calculo* plerunque rem expedit peragere) tum connexâ M C; patet eſſe $E C = \frac{r r}{x}$; & $M C q = 2 x x - r r$ (nam $P M q = x x - r r$) item eſt M C q. C P q :: M E q . M P q; hoc eſt M C q . C P q :: E C q . C G q. hoc eſt $2 x x - r r . x x :: \frac{r^4}{x x} . C G q = \frac{r^4}{2 x x - r r}$. quare $V G q = \frac{r^4}{2 x x - r r} + r r = \frac{2 r r x x}{2 x x - r r} = \frac{V A q \times C P q}{M C q}$. vel $V G = \frac{V A \times C P}{M C}$. quare V G . V A :: (C P . M C) :: M P . M E. hinc conſectatur in hoc caſu, quum ubique ſit I X = V A, *lineam* R S fore *rectam*; & *rectangulum* B R S D *ſuperficiei conicæ* A M B V *duplum eſſe*.

Cæterùm hoc *elegans exemplum* ſuppeditavit Generoſus, ingenio ac eruditione præſtans, Vir (*Collegii noſtri, quod olim Sociorum Commenſalis incoluit*, ornamentum) *D. Franciſcus Jeſſopius*, Armiger; cujus in hanc rem perquam ingenioſo mihi comiter impertito ſcripto (ipſius injuſſu quidem, at ſpero non ingratiis) ſeu *Gemmâ* quâdam audebo mea condecorare.

Prop.

Prop. 1.

Si à puncto E in *axe* A *m coni recti* A B C *p* recta infinita E C tranſeat per *coni ſuperficiem*, & quieſcente termino E circumferatur recta E C donec redeat ad locum à quo cœpit moveri, ita ut ſemper aliqua pars ejus ſecet *coni ſuperficiem* (puta per *Hyperbolam* C F D & rectas D A A C in ſuperficie coni ſitas) *ſolidum comprehenſum à ſuperficie vel ſuperficiebus genitis à linea* E C ſic mota & à *portione ſuperficiei* ejuſdem coni terminatæ à linea vel lineis C F D, D A, A C quas recta E C circumlata deſcribit in *ſuperficie conica*, erit æquale *Pyramidi* cujus *Altitudo* eſt æqualis *perpendiculari* E *n* à puncto E ad latus *Coni* deductæ *baſis* verò æqualis eidem *ſuperficiei conicæ terminatæ* à linea vel lineis C F D, D A, A C generatis à motu lineæ E C. Fig. 178.

Solidum enim E C F, D A C conſtat ex *infinitis pyramidibus* E C *o* A E *o o* A, &c. æquialtis perpendiculari E *n*, quarum baſes omnes ſimul ſumptæ, exhauriunt *ſuperficiem conicam* C F D, D A, A C.

Prop. 2.

Datus ſit *Conus rectus* A B C *p* ſecetur à plano C F D axi A *m* parallelo ducantur rectæ A C, A D à vertice *coni* ad *lineam hyperbolicam* C F D, & ſuper *triangulo* A C D erigatur *pyramis* E A C D habens *verticem* E in *axe coni*; ſitque E ♢ plano A C D perpendicularis, & E *n* lateri coni. Fig. 178.

Dico, *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ita ſe habet ad A C D *baſem pyramidis* E A C D ut *altitudo* E ♢ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n*. Quoniam enim Conici A C F D, E C F D habent vertices A & E in plano baſi C F D (quæ eſt utrique Conico communis) parallelo ergo ſunt æquales. Si ergò à ſolido quod componitur à conico A C F D addito pyramide E C A D auferatur conicus E C F D reliquum erit ſolidum E C F D A C quale in propoſitione prima deſcribitur motu rectæ E C æquale pyramidi E A C D. Quoniam verò *æqualium pyramidum* reciprocæ ſunt *baſes altitudinibus*, ut *altitudo* E ♢ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n* ita erit *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ad Triangulum A C D. q. E. D.

Prop.

Prop. 3.

Fig. 178. Datus ſit *Conus rectus* A B C *p*. Secetur à plano (puta *triangulo q r t*) quod quidem planum ſecabit *axem coni* in puncto *q* ſupra *verticem* productum & in communi interſectione cum *ſuperficie coni* habebit *lineam hyperbolicam* R S *t* ducantur à vertice coni A rectæ A *r*, A *t*, à puncto *q* demittatur perpendiculum *q* X lateri coni A *p* producto & à puncto A perpendiculum A Z plano *q r t*.

Dico *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica*, *r s t* & rectis *r* A, *t* A, ita ſe habet ad *figuram hyperbolicam cavam q r s t q* ut *perpendiculum* A Z ad *perpendiculum q* X.

Recta enim *qr*, circumlata, quieſcente termino *q* per lineas *rst*, *t* A, A *r* generat tres *ſuperficies*, nempe *hyperbolicam cavam q r*, *s t*, & *duo triangula q t* A, *q* A *r*, quæ una cum *ſuperficie conica* terminata à lineis *r s t*, *t* A, A *r*, comprehendunt *Solidum q r s*, *t* A *r*. Hoc verò *ſolidum æquale* eſt *pyramidi* cujus *altitudo* eſt æqualis perpendiculo *q* X, nam infinitæ pyramides *q* A *r* V, *q* A V V, exhauriunt ſolidum *q r* S *t* A *r*. Si verò aliter contemplari volumus, hoc ſolidum *q r s t* A *r* poteſt conſiderari tanquam *figura conica* A *r* S *t q r* habens pro *baſe figuram hyperbolicam* cavam *q r* S *t q*, & pro altitudine *perpendiculum* A Z. Ergò reciprocando *baſes altitudinibus*, ut A Z ad *q* X, ita *ſuperficies*, *r* S *t* A *r* ad *figuram hyperbolicam cavam q r* S *t q*.

Prop. 4.

Fig. 179. Datus ſit *Conus rectus* A B *h g* ſecetur à plano H F E G per axem infra verticem, a puncto H ubi *planum* ſecat *axem coni*, demittatur H K *perpendiculum* lateri cuilibet coni & à vertice A *perpendiculum* A L plano H F E G.

Dico, *Superficies conica* terminata à lineis F E G G A A F ita ſe habebit ad *planum* H F E G ut *perpendiculum* A L ad *perpendiculum* H K.

Probatur eodem fere eodem fere argumento quo ſuperior.

Præcedentia

APPENDICULA 3.

Præcedentia recolenti nonnulla videntur elapſa; quæ forſan ex uſu ſit adjicere. *Demonſtrationes* elicere poterit quiſpiam è præmiſſis; & potior inde fructus emerget.

Problema I.

Fig. 180.

Sit *curva* quævis KEG, cujus *axis* AD; & in hoc ſignatum punctum A; curva reperiatur, puta LMB, talis, ut ſi ductâ utcunque rectâ PEM axi AD perpendicularis curvam KEG ſecet in E, & curvam LMB in M; nec non connectatur AE, & curvam LMB tangat recta TM; ſit TM ipſi AE parallela.

Hoc ità fiet. Per aliquodcunque punctum R, in axe AD ſumptum, protendatur recta RZ ad ipſam AD perpendicularis; cui occurrat recta EA producta in S; & in recta EP ſumatur PY = RS; ità determinetur curvæ OYY proprietas; tum ſit rectangulum ex AR, & PM æquale ſpatio AYYP (ſeu $PM = \frac{\text{ſpat. AYYP}}{AR}$) habebit curva LMMB conditionem propoſitam.

Adnotari poteſt, ſi ſtantibus reliquis, ſit curva QXX talis, ut cum hanc ſecet recta EP in X, ſit PX = AS; erit ſpatium AXXP æquale rectangulo ex AR, & curva LM, ſeu $\frac{AXXP}{AR} = LM$.

Exemp. I.

Sit ADG *circuli* quadrans, & ductâ EP ad AD utcunque perpendiculari, connexâque DE; deſignetur curva AMB talis, ut ſi producta recta EPM hanc ſecet in M, ipſamque tangat recta MT, ſit MT ad DE parallela. Hoc ita peragetur. Ducatur AZ ad DG parallela; & huic occurrat producta DE in S, & curva AYY talis ſit, ut ſi hanc ſecet producta PE in Y, ſit PY = AS; tum capiatur $PM = \frac{\text{Spat. AYP}}{AD}$; factum erit. Fig. 181.

Not. Quòd ſi curva QXX talis ſit, ut PX = DS (vel ſi AQ = AD, & QXX ſit *hyperbola* angulo ADG comprehenſa) erit curva AM × AD = ſpat. AQXP.

Exemp. II.

Fig. 182. Sit curva A E G (cujus *axis* A D) proprietate talis, ut ſi à quocunque puncto in ipſa ſumpto E, ducatur recta E P ad A D normalis; connectatúrque A E, ſit A E inter deſignatam A R, & A P proportione media, ſecundum ordinem, cujus exponens ſit $\frac{n}{m}$; reperiatur curva A M B, quam tangat T M ad A E parallela.

De curva A M adnoto fore $n . m :: A E . \text{arc. } A M$.

Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ (vel A E ſit inter A R, A P ſimpliciter media) erit A E G circulus, & A M B *Ciclois primaria*; hujus igitur dimenſio è lege generali habetur.

Hæc etiam ex adjuncto *Problemate* magis ccomprehenſivo peraguntur.

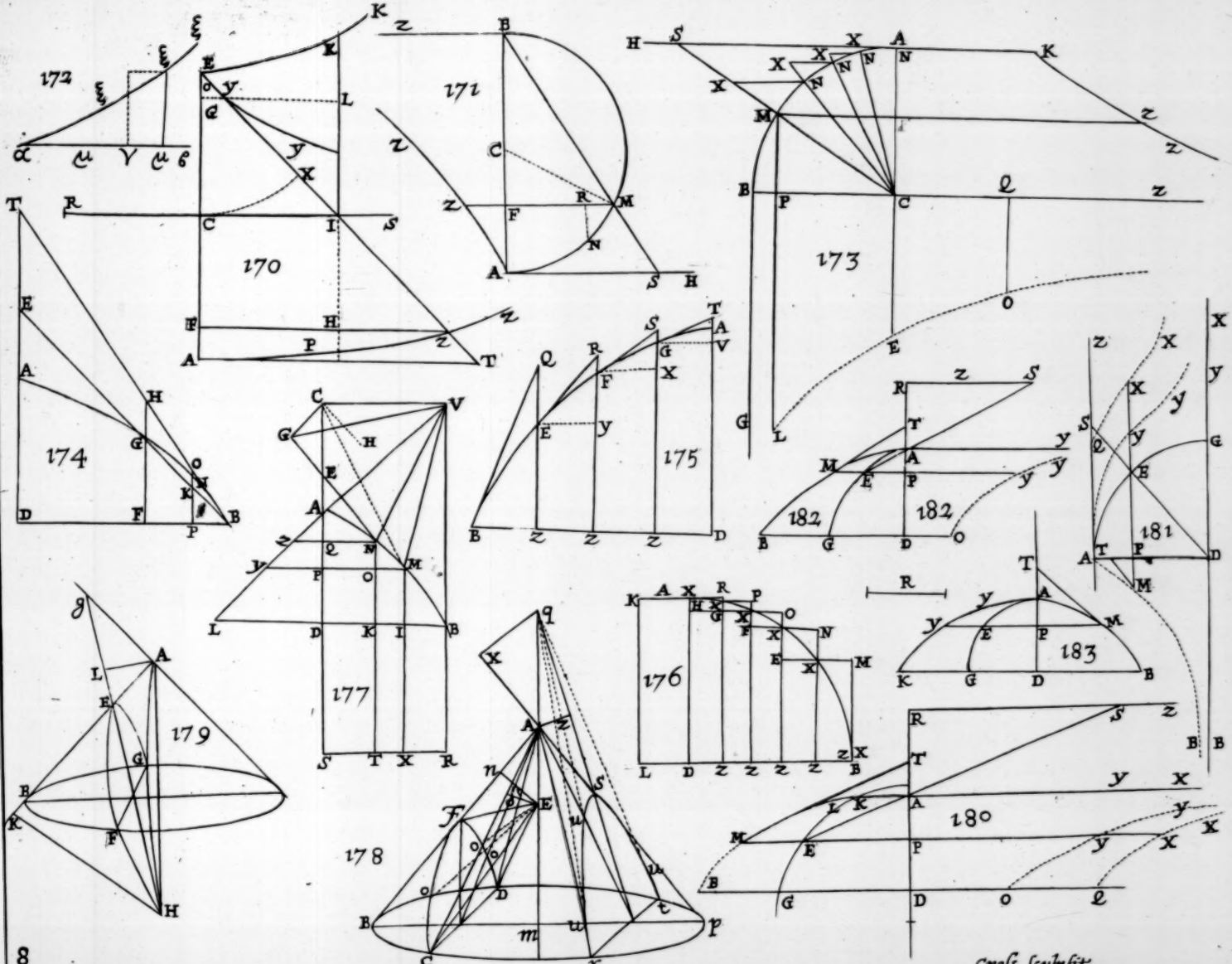
Probl. II.

Fig. 183. Curva deſignetur, puta A M B, cujus *axis* A D, ità ut in hac ſumpto puncto quopiam M, & ductâ M P ad A D perpendiculâri, & poſito rectam M T ipſam tangere, habeant T P, P M relationem aſſignatam.

Accipiatur recta quæpiam R, & fiat ut T P ad P M (quam utique rationem aſſignatâ dabit relatio) ità R ad P Y (quæ nempe ſumatur in recta P M, & ad axem A D ordinetur) ſic ut per ejuſmodi puncta Y tranſeat curva Y Y K; tum ſi fiat $P M = \frac{\text{ſpat. } A P Y}{R}$; de curvæ A M B indè conſtabit natura.

Exemp. I.

Fig. 184. Sit A D G *circuli* quadrans; cujus radius æquetur deſignatæ R; & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam habet R ad arcum A E; ergo quum ſit, juxta præſcriptum, R. arc. A E :: R. P Y; erit P Y = arc. A E; hinc habetur $P M = \frac{A P Y}{R}$. *Exemp.*


172
171
173
170
174
175
182
182
181
177
176
183
179
178
180
Cross sculpsit
8

Exemp. II.

Sit A D G *circuli* quâdrans, & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam P E ad R; eſt ergo P Y æqualis *tangenti* arcûs GE; & ſpat. A P Y Y = R × arc. A E. adeóque P M = arc. A E.

Probl. III.

Proponatur figura quælibet A D B (cujus *axis* A D, *baſis* D B) reperiatur curva K Z L, proprietate talis, ut ductâ rectâ Z P M ad D B utcunque parallela quæ lineas expoſitas ſecet ut cernis) poſitóque rectam Z T tangere curvam K Z L, ſit intercepta T P æqualis ipſi P M. Fig. 185.

Hoc ità perficietur. Sit curva O Y Y talis, ut adſumptâ quâdam R, protractâque P M Y, ſit P M. R :: R. P Y; tum liberè adſumptâ D L (in B D protensâ) ſit D L. R :: R. L E; & *aſymptotis* D L, D G per E deſcribatur *Hyperbola* E X X; tum ſit ſpatium L E X H æquale ſpatio D O Y P, & protractæ X H, Y P concurrant in Z; erit Z in curva quæſita; quam ſi tangat Z T, erit T P = P M.

Adnotetur, ſi propoſita figura ſit *rectangulum Parallelogrammum* A D B C, quod curvæ K Z L hæc erit proprietas, ut ſit D H eodem ordine inter D L, D O media *Geometricè* proportionalis, quo D P inter D A & o (ſeu nihilum) eſt media *Arithmeticè*; quod ſi liberè juxta proprietatem hanc deſcribatur curva K Z L, & *Mechanicè* reperiatur tangens Z T, indè quadrabitur *hyperbolicum ſpatium* L E X H; erit utique hoc æquale *rectangulo* ex T P, A P. Fig. 186.

Subnotari poſſit fore 1. Spat. A D L K = $R \times D L - DO$. 2. Summam Z P q = $R \times : \frac{DLq - DOq}{2}$. & ſummam Z P cub. = $R \times \frac{DL\,cub. - DO\,cub.}{3}$ &c. 3. Si ponatur φ eſſe centrum gr. figuræ A D L K, ducantúrque φ ↓ ad A D, & φ ξ ad D L perpendiculares, fore φ ↓ = $\frac{DL + DO}{4}$, & φ ξ = $R - \frac{AD \times DO}{LO}$.

Probl. IV.

Fig. 187. Sit angulus B D H rectus, & B F ad D H parallela; & *aſymptotis* D B, D H per F deſcripta ſit *hyperbola* F X G; item centro D deſcriptus ſit circulus K Z L; ſit denuò curva A M B talis, ut in hac ſumpto quocunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ D M Z, item ſumptâ D I = D M; & ductâ I X ad B F parallelâ, ſit *ſpatium hyperbolicum* B F X I æquale duplo *circulari ſectori* Z D K; curvæ A M B tangens ad M determinetur.

Ducatur D S ad D M perpendicularis; ſitque D B × B F = R q; fiátque D K . R :: R . P; tum D K . P : : D M . D T; & connectatur T M; hæc curvam A M B tanget.

Adnotetur curvæ A M B hanc eſſe proprietatatem; ut D I ſit inter D B, D O (vel D A) eodem ordine *media proportionalis Geometricè*, quo arcus K Z inter *o* (ſeu nihilum) & arcum K L eſt medius *Arithmeticè*. hoc eſt, ſi D I ſit numerus in ſerie *Geometricè proprtionalium* incipiente à D B, & terminatâ in D A; ac *o*, K L ſint Logarithmi ipſarum D B, D A; erit K Z Logarithmus ipſius D I. Vel retrò (prout vulgares *Logarithmi* procedunt, ſi D I ſit numerus in ſerie *Geometrica* exorſa à D O, & deſinente in D B ac *o* ſit *Logarithmus* ipſius D O, & arcus L K ipſius D B, erit arcus L Z *Logarithmus* ipſius D I.

Quod ſi abſolutè conſtruatur curva A M B, ejúſque *tangens Mechanicè* deprehendatur, inde patet *hpperbolici ſpatii Cycliſmum* dari, vel *Circuli hyperboliſmum*.

Hujuſce *Spiralis* naturam, ac dimenſionem (ut & Spatii B D A dimenſionem) luculentè profecutus eſt præclariſſimus D. *Walliſius*, in Libro de *Cycloide*; quapropter de illa plura reticeo.

Probl. V.

Fig. 188. Sit ſpatium quodpiam E D G (rectis D E, D G, & linea E N G comprehenſa) & data quædam R; curva A M B reperiatur talis, ut ſi utcunque à D projiciatur recta D N M, & D T ad hanc perpendicularis ſit, & M T curvam A M B contingat; ſit D T . D M :: R . D N.

Sit curva K Z L talis, ut D Z = √ R × D N; ſumptâque liberè rectâ

rectâ DB, ſit DB.R::R.BF (ſit autem BF, ut & DH ipſi DB perpendicularis) tum per F, angulo BDH incluſa, tranſeat *hyperbola* FXX; ſitque ſpatium BFXI (poſitâ nempe IX ad BF *parallelâ*) æquale duplo ſpatio ZDL; ſit denuo DM = DG; erit M in curva quæſita; quam utique ſi tangat recta TM, erit TD.DM::R.DN.

Probl. VI.

Sit rurſus ſpatium EDG (ut in præcedente) reperienda eſt curva AMB, ad quam ſi projiciatur recta DNM, & ſit DT huic perpendicularis, & MT curvam AMB tangat, fuerit DT = DN. Fig. 188.

Adſumatur quæpiam R, & ſit $DZq = \frac{R^3}{DN}$; item acceptâ DB (cui perpendiculares DH, $BF = \frac{R^3}{DBq}$; & per F intra *aſymptotos* DB, DH deſcribatur *hyperboliformis* ſecundi generis (in qua nempe ordinatæ, ceu BF, vel IX, ſint quartæ proportionales in ratione DB ad R, vel DG ad R) tum capiatur ſpatium BIXF æquale duplo ZDL; & ſit DM = DI; erit M in curva quæſita; quam ſi tangat MT, erit DT = DN.

Probl. VII

Sit figura quævis ADB (cujus *axis* AD, *baſis* DB) & utcunque ductâ PM ad DB parallelâ datum ſit (ſeu expreſſum quomodocunque) ſpatium APM, oportet hinc ordinatam PM exhibere, vel exprimere. Fig. 189.

Acceptâ quâqiam R, ſit R × PZ = APM; hinc emergat linea AZZK; huic perpendicularis reperiatur ZO; tum erit PZ.PO::R.PM.

Exemp. AP vocetur x & ſit $APM = \sqrt{rx^3}$, ergo $PZ = \sqrt{\frac{x^3}{r}}$; unde reperietur $PO = \frac{3xx}{2r}$. Eſtque $\sqrt{\frac{x^3}{r}} \cdot \frac{3xx}{2r} :: r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{rx} = PM$. unde AMB eſt *Parabola*, cujus *Parameter* eſt $\frac{2}{4}r$.

Aliter.

Aliter. Fiat $PZ = \sqrt{2APM}$. & ſit ZO curvæ AZK perpendicularis; erit PM = PO.

Exemp. Sit $AP = x$; & $APM = \frac{x^3}{r}$. quare $PZ = \sqrt{\frac{2x^3}{r}}$

unde reperietur $PO = \frac{3xx}{r} = PM$; & rurſus AMB erit *Parabola.*

Probl. VIII.

Fig. 190. Sit figura quævis ADB (rectis DA, DB, & linea AMB comprehenſa) & à D utcunque projectâ rectâ DM, datum ſit ſpatium ADM; oportet rectam DM definire.

Acceptâ quâpiam R, ſit $DZ = \frac{2ADM}{R}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DM perpendicularis; erit $DM = \sqrt{R \times DO}$.

Aliter. Sit $DZ = \sqrt{4ADM}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DZ perpendicularis; erit $DM = \sqrt{DZ \times DO}$.

De figuris involutis & evolutis bellam σχόλιον inſtituit *Præclarus Geometra D. Gregorius Aberd.* Alienæ meſſi nollem ego falcem meam immittere, verùm liceat utcunque iſthuc pertinentes (aliud agenti quæ mihi ſe ingeſſerunt) unam aut alteram obſervatiunculam his intexere.

Probl. IX.

Fig. 191. Data ſit figura quæpiam ADB (cujus *axis* AD, *baſis* DB) oportet ei congruentem involutam exhibere.

Fig. 192. *Centro* C, intervallo quopiam CL deſcribatur *Circulus* LXX; ſit autem curva KZZ talis, ut pro lubitu ductâ rectâ MPZ ad BD parallelâ,

rallelâ, ſit rectangulum ex PM, PZ æquale quadrato ex CL (vel $PZ = \frac{CLq}{PM}$). Sit tum arc. $LX = \frac{\text{ſpat. } DKZP}{CL}$ (vel ſector LCX ſubduplus ſpatii DKZP) & in CX capiatur $C\mu = PM$; erit linea $c\mu\mu$ ipſius BMA involuta; vel ſpatium $C\mu c$ ſpatii ADB.)

Exemp. Sit ADB circuli quadrans; erit ergò (quod è præmonſtratis conſtat) ſpat. DKZP (2 ſector LCX). ſect. BDM :: CLq. DBq. unde arc. LX. arc. BM :: CL. DB. quare ang. LCX = ang. BDM = ang. DMP. unde ang. $C\mu c$ eſt rectus, adeóque linea $c\mu C$ eſt *ſemicirculus.*

Coroll. 1. Subnotari poteſt, ſi duæ figuræ ADB, ADG analogæ fuerint; & harum *involutæ* ſint $C\mu c$, $C\nu\gamma$; & fuerit $C\mu . C\nu$ :: DB. DG; erit reciprocè ang. $cC\mu . c C\nu$:: DG. DB. Fig. 193.

2. Illud etiam converſè valet.

3. Sin curvæ $C\nu\gamma$, CSc ſuo modo analogæ fuerint, hoc eſt, ſi utcunque à C projectâ rectâ $C\nu S$, habeant $C\nu$, CS eandem perpetuò rationem, erunt hæ ſimilium linearum *involutæ.* Fig. 194.

Probl. X.

Data figurâ quâpiam $cC\varphi$ rectis Cc, $C\varphi$, & aliâ lineâ $c\varphi$ comprehensâ, ei competentem *evolutam* deſignare. Fig. 195.

Centro C utcunque deſcribatur *circularis arcus* LE (cum rectis Cc, $C\varphi$ conſtituens ſectorem LCE) tum ductâ CK ad LC perpendiculari, ſit curva cYH ità rectam CK reſpiciens, ut liberè projectâ rectâ $C\mu Z$, ſumptâque CO = arc. LZ, ductâque OY ad CK perpendiculari, ſit $OY = C\mu$; porrò ad rectam DA ſic referatur curva BMF, ut cùm ſit $DP = \frac{\text{ſpat. } Cc YO}{CL}$; & PM ad DA perpendicularis; ſit etiam $PM = C\mu$; erit ſpatium DBFA ipſius $Cc\varphi$ *evolutum.* Fig. 196.

Exemp. Sit LZE arcus circuli centro C deſcripti, & $c\mu C$ ejuſmodi *ſpiralis* Fig. 197.

ſpiralis, ut pro arbitrio ductâ rectâ C μ Z habeat arcus E Z ad rectam C μ rationem aſſignatam (puta R ad S) Manifeſtum eſt lineam c Y H eſſe rectam, quoniam E Z (K O). C μ (O Y) :: R. S, perpetuò.
Fig. 198. unde evoluta B M F fit *Parabola*; quoniam axis partes A P, A D ſe habent ut ſpatia K O Y, K C c, hoc eſt ut quadrata ex ipſis O Y, C c, vel ex ipſis P M, D B.

Corol. Theor. I.

Si ad figuram c C φ erigatur *cylindricus* altitudinem habens æqualem peripheriæ integræ *circuli*, cujus radius C L; erit iſte *cylindricus* æqualis *ſolido*, quod procreatur è figurâ C c H K circa axem C K rotatâ.

Theor. II.

Fig. 195. Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, baſis D B) & curva A Z L talis, ut liberè ductâ rectâ Z P M, ſit P Z = √ 2 A P M; ſit item alia curva O Y Y talis, ut ad hanc productâ rectâ Z P M Y, adſumptâque rectâ R, ſit Z P q . R q :: P M . P Y; ſitque denuò D L.
Fig. 199. R :: R. L E. & per E intra angulum L D G deſcribatur *Hyperbola* E X X; huic autem occurrat ducta recta Z H X ad A D parallela, erit ſpatium P D O Y æquale *ſpatio Hyperbolico* L H X E.

Hinc *ſumma* omnium $\frac{PM}{APM} = \frac{2\,LEXH}{Rq}$.

Theor. III.

Sit curva quæpiam A M B, cujus axis A D, baſis D B; & curva K Z L talis, ut adſumptâ quâdam R, & arbitrariè ductâ rectâ Z P M ad B D parallelâ, ſit √ A P M . P M :: R . P Z; erit ſpatium A D L K
Fig. 200. æquale *rectangulo* ex R in 2 √ A D B; vel $\frac{ADLK}{2R} = \sqrt{ADB}$.

Exemp. Sit A D B circuli quadrans, erit ſumma omnium $\frac{PM}{APM} =$ √ 2 D A × arc. A B.

Theor. IV.

Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, baſis D B) ſintque duæ lineæ E X K, G Y L ità relatæ, ut in curva A M B ſumpto quopiam

am puncto M, ductíſque rectis M P X ad B D, & M Q Y ad A D parallelis, poſitóque rectam M T tangere curvam A M B, ſit T P. P M :: Q Y. P X; erunt figuræ A D K E, D B L G ſibimet æquales. Fig. 201.

Valet hoc converſum. Nempe ſi figuræ A D K E, D B L G æquentur, & M T curvam A M B tangat, erit T P. P M :: Q Y. P X:

Not. Omnium hactenus Propoſitorum fœcundiſſimum eſt hoc *Theorema*; præcedentium quippe complura vel in eo continentur, aut ab eo facilè conſectantur. Nam poſito lineam A M B indeterminatam eſſe naturâ, ſi ipſarum E X K, G Y L alterutra pro tuo arbitratu determinetur, exinde reſultabit Theorema quoddam ejuſmodi, qualia ſuperiùs exhibentur aliquammulta. Si *e. g.* linea G Y L ponatur recta cum ipſa B D ſemi-rectum conſtituens angulum (quo caſu concipiuntur puncta D, G coincidere) proveniet indè prima *Lectionis* XI. Si G Y L ſit recta ad D B parallela, emerget *Lectionis ejuſdem.* Rurſus ſi P M = P X (vel lineæ A M B, E X K ſint eædem) conſequetur hinc *decima* ejuſdem. Exhinc porrò liquet adſumpto cuilibet ſpatio *infinita, genere diverſa, ſpatia æqualia* facilè deſignari veluti ſi *ſpatium* D G L B ponatur *circuli quadrans*, cujus *centrum* D; & curva A M B ſit *parabola*, cujus *axis* A D, emerget curvæ E X K hæc proprietas, ut (ſi dicatur D B = r; A P = x; P X = y; & k (vel $\frac{DBq}{2AD}$) ſit *parabolæ ſemiparameter*) ſit $\frac{rrk}{2} = kkx + xyy$. Sin A M B ponatur *hyperbola*, procreabitur alterius generis curva E X K. his autem expenſis ἀβλεψίαν meam incuſo, qui non hoc *Theorema* (ſicut & ea quæ ſubſequuntur, quorum ferè ratio conſimilis eſt, & ſuppar uſus) primo loco poſuerim, & ex eo (nec non è reliquis mox ſubjiciendis) quod fieri poſſe video, reliqua deduxerim. Veruntamen hujuſmodi *Phrygiam ſapientiam* juxta mecum pleriſque familiarem autumo, literas has tractantibus. Fig. 202.

Theor. V.

Sit ſpatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curva A M B comprehenſum) ſint item curvæ E X K, G Y L ità relatæ, ut ſi in curva A M B liberè ſumatur punctum M, ducatur D M X, ſit D Q = D M, ducatur Q Y ad D B perdendicularis, ſit D T ad D M perpendicularis, recta M T curvam A M B contingat; ſi, his inquam ſuppoſitis, ſit T D. D M :: D M × Q Y. D X q; erit ſpatium D G L B ſpatii E D K duplum. Fig. 203.

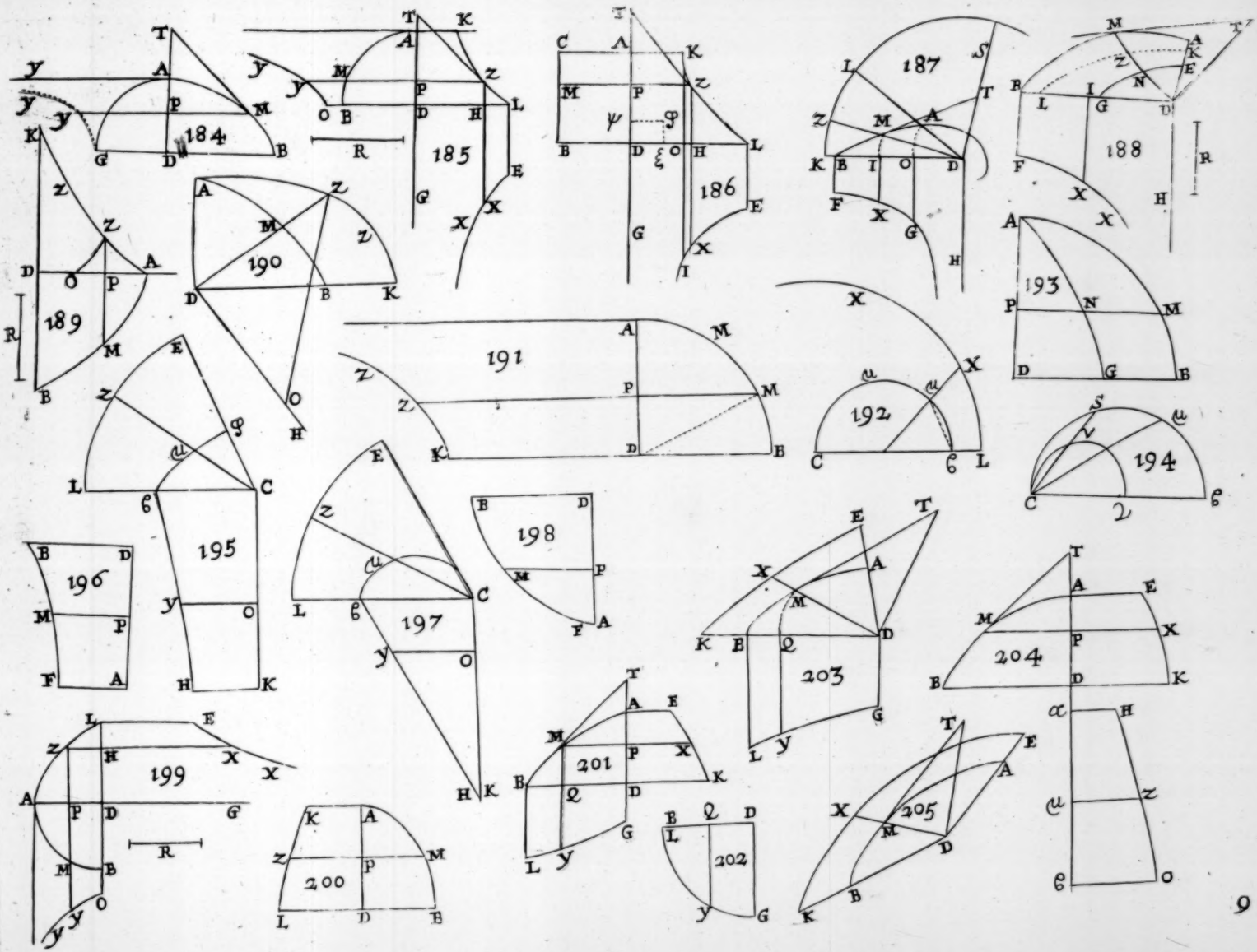
Theor. VI.

Fig. 204. Sit rurſus A M B curva quævis (cujus axis A D, baſis D B) & curvæ E X K, H Z O ita verſus ſe, & axes A D, $\alpha\zeta$ relatæ, ut arbitrariè in curva A M B accepto puncto M, & ductâ M P X ad A D perpendiculari, ſumptâ $\alpha\mu$ = arc A M, ductâ μ Z ad $\alpha\zeta$ perpendiculari, poſitóque rectam T M curvam A M B tangere; ſit T P . T M :: μ Z . P X; erunt ſpatia A D K E, $\alpha\zeta$ O H æqualia ſibi.

Theor. VII.

Fig. 204, 205. Sit ſpatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curvâ A M B definitum) ſint item curvæ E X K, H Z O ità relatæ, ut ſi quodvis capiatur punctum M in curva A M B, projiciatur recta D M X, ſumatur $\alpha\mu$ = arc A M; ducatur μ Z ad rectam $\alpha\zeta$ perpendicularis; ſit D T perpendicularis ipſi D M; recta M T curvam A M B tangat; ſit T D . T M :: D M × μ Z . D X q; erit ſpatium $\alpha\zeta$ O H ſpatii E D K duplum.

Sed horum hic eſto terminus.


184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
R

LECT. XIII.

ÆQuationum naturam è terminorum *analogia* expoſuit *Vieta*; illam ex eorum in ſe ductu dilucidiùs explicuit *Carteſius*. Eam ego jam è linearum ſingulis appropriatarum deſcriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui ſanè modus rem præſertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In ſequentibus perpetim ad eaſdem ſeries redigi æquationes, quæ *coefficientes* habent eaſdem.

Æquationum Series prima.

$$a + b = n.$$
$$aa + ba = nn.$$
$$a^3 + baa = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 = n^4, \&c.$$

Sumatur recta B A æqualis coefficienti *b*, & hæc verſus H indefinitè protendatur; ſint anguli R A H, S B H ſemirecti, ſintque lineæ A L L, A M M, A N N tales, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari (quæ dictas lineas ordine ſecet punctis L, M, N; rectaſque B S, A R punctis K, Z) ſit inter G Z, G K *media* G L *, *bimedia* G M, *trimedia* G M; hæc lineæ propoſitarum æquationum naturæ explicandæ inſervient. Nam ſi A G (vel G Z) dicatur *a*; erit B G (vel G K) $= b + a$; atque G L $q = aa + ba$; & G M cub. $= a^3 + baa$; & G N $qq = a^4 + ba^3$. Fig. 206.

* Vid. *pag.* 90.

Notetur autem,

1. Ducta A D ad B H perpendiculari, si in hac capiatur A E = *n*; ducatúrque E F ad A H parallela; hujus cum lineis expositis intersectiones æquationum propositarum radices exhibebunt respectivè; erit utique F K, vel E L, vel E M, vel E N æqualis ipsi *a*; hoc est ipsis A G, concipiendo à singula intersectione deduci ad A H perpendiculares, quæ puncta G determinet.

Fig. 206.

2. Quò punctum G magis à termino A removetur (& quidem potest G A desumi quavis designatâ majori) eò ordinatæ G K, G L, G M, G N magis increscunt; adeò ut quantacunque ponatur A E, parallela E F curvis occursura sit; & proinde semper habetur vera radix istarum æquationum cuilibet conveniens; & ea tantùm una, quoniam E F curvas istas unico puncto intersecat.

3. *Curva* A L L est *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* A B, reliquæ A M M, A N N sunt *hiperboliformes*.

4. Si A O sit $\frac{1}{2}$ A B; & A P = $\frac{1}{3}$ A B, & A Q = $\frac{1}{4}$ A B, ducantúrque O T, P V, Q X ad B S parallelæ, erunt hæ curvarum A L L, A M M, A N N *asymptoti*.

5. Hinc constat in secundo gradu fore $a \sqsubset n - \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n - \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n - \frac{b}{4}$; quæ tamen inæqualitates, si A E benemagna sit, exiguæ erunt.

6. Æquationibus istis nulla competit *maxima*, *vel minima*.

Series secunda.

$$a - b = n.$$
$$aa - ba = nn.$$
$$a^3 - baa = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 = n^4, \text{ \&c.}$$

Sit rursus A B = *b*; & indefinitè protrahatur A B versus I, & sint anguli R A I, S B I semirecti; tum concipiantur curvæ B L L, B M M, B N N tales, ut si utcunque ducatur G Z ad A I perpendicularis (dictas lineas secans, uti cernis, punctis K, L, M, N, Z) sit inter G Z,

Fig. 207.

GZ, GK media GL, bimedia GM trimedia GN; propoſitas æquationes explicabunt hæ lineæ. Nam ſi AG (vel GZ) vocetur a; erit BG (vel GK) $= a - b$; & GLq $= aa - ba$; & GM cub. $= a^3 - baa$; & GNqq $= a^4 - ba^3$.

Not.

1. Ductâ AD ad AI perpendiculari, & EF ad AI parallelâ, ſi AE ponatur æqualis ipſi n; erunt EK, EL, EM, EN radices æquationum reſpectivæ, ſeu æquales quæſitis a.

2. Quoniam ordinatæ GK, GL, GM, GN à termino B verſus I infinitè excreſcunt, ſemper habetur una vera radix, & unica.

3. Curva BLL eſt *hyperbola aquilatera*, cujus *axis* AB, reliquæ curvæ ſunt *hyperboliformes*.

4. Si AB biſecetur in O, triſecetur in P, quadriſecetur in Q, ducantúrque ad AR parallelæ OT, PV, QX, erunt hæ curvarum BLL, BMM, BNN *aſymptoti*.

5. Hinc ſequitur in ſecundo gradu fore $a \sqsubset n + \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n + \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n + \frac{b}{4}$; quòd ſi n ſatis magna ſit, iſtæ inæqualitates ad æqualitatem proximè accedunt.

6. Verarum in his radicum habetur *minima*; ſcilicet ipſa AB, vel b.

Series tertia.

$b - a = n.$
$ba - aa = nn.$
$baa - a^3 = n^3.$
$ba^3 - a^4 = n^4.$ &c.

Fig. 280.

Sit AB $= b$, & anguli RAB, SBA ſemirecti; tum curvæ ALB, AMB, ANB tales, ut ductâ rectâ GK ad AB utcunque perpendiculari (quæ lineas expoſitas ſecet, ut vides) ſit inter AG (ſeu GZ) & GK *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; propoſitas æquationes explicatas dabunt hæ lineæ. Nam poſito fore AG $= a$, erit GK $= b - a$; & GLq $= ba - aa$; & GMq $= baa - a^3$. & GNq $= ba^3 - a^4$.

Not.

Not.

Fig. 208. 1. Si in A D (ad ipſam A B perpendiculari) deſumatur A E = n, & ducatur E F ad A B parallela, hujuſce cum lineis expoſitis interſectiones exhibebunt radices a reſpectivè.

2. Cùm ad haſce curvas ordinatæ ſemper terminatæ ſint, & inter ipſas maxima quædam detur, hujus *ſeriei æquationes*, pro modulo aſſignatæ A E (vel n) ſubinde duas radices veras habent (cùm utique fuerit A E curvæ maximâ ordinatâ minor reſpectivè, hoc eſt cùm E F curvæ bis occurrerit) nonnunquam duntaxat unam (cum A E nempe maximam adæquet, adeóque E F curvam contingat) aliquando nullam (cum ſcilicet A E maximam excedat, adeóque nec E F curvæ unquam occurrat).

3. In ſecundo gradu ſi A O = O B, & ordinetur O T, erit O T maxima; (adeóque radicum una major quàm $\frac{A B}{2}$, altera minor) in tertio, ſi A P = 2 P B, & ordinetur P V, erit P V maxima (unde radicum una major erit quàm $\frac{1}{3}$ A B, altera minor) demùm in quarto gradu ſi A Q = 3 Q B, & ordinetur Q X, erit Q X *maxima* (& hinc una radicum ſemper major, quàm $\frac{1}{4}$ A B, & altera minor).

4. Hinc conſectatur, ſi fuerit, in ſecundo gradu $n \sqsubset \frac{b}{2}$; in tertio $n^3 \sqsubset \frac{4b^3}{9} - \frac{8b^3}{27} = \frac{4b^3}{27}$; in quarto $n^4 \sqsubset \frac{27}{64}b^4 - \frac{81}{256}b^4 = \frac{27b^4}{256}$; nullam dari radicem.

5. Omnium radicum *maxima* eſt ipſa A B, vel b.

6. Omnium curvarum communis *interſectio* (ſeu *nodus*) eſt punctum T; & ſi fuerit $n = \frac{b}{2}$; ſemper A O (vel $\frac{b}{2}$) eſt una radix.

7. Curva A L B eſt *Circulus*, reliquæ A M B, A N B eum quodammodo referunt.

1.	2.	3.
$a + b = n$	$a - b = n.$	$b - a = n.$
$a + b = \frac{nn}{a}$	$a - b = \frac{nn}{a}$	$b - a = \frac{nn}{a}$
$a + b = \frac{n^3}{aa}$	$a - b = \frac{n^3}{aa}$	$b - a = \frac{n^3}{aa}$
$a + b = \frac{n^4}{a^3}$	$a - b = \frac{n^4}{a^3}$	$b - a = \frac{n^4}{a^3}$

Aliter

Aliter (& forte commodiùs; pro ſingulo trium ſerierum gradu tantùm unam adhibendo lineam) explicantur iſtæ præcedaneæ æquationes, hoc pacto:

Sit A H recta indefinitè protenſa, & huic perpendicularis A D; in qua ſumatur A B = *n*, & ducatur B K ad A H parallela, tum ſint lineæ L X L, M X M, N X N tales, ut ſumpto in A H quocunque puncto G, & ductâ G K ad A D parallelâ, ſit in proportione A G ad G K (vel A B) proportione *tertia* G L, *quarta* G M, *quinta* G N; hæ lineæ propoſitarum æquationum naturæ explicandæ inſervient. Fig. 209, 210.

Nam ſumpta A E = *b* (ſumatur autem A E ob primam ſeriem ad partes I, ob ſecundam & tertiam ad partes H) & fiat angulus F E H ſemirectus (iſte quidem pro prima & ſecunda ſerie inclinans verſus H, pro tertia reclinans ab H, ut Schema ſatis monſtrat) tum rectæ E F cum expoſitis lineis interſectiones reſpectivæ radices *a* determinabunt; nempe ſi per has ductæ concipiantur ad A H perpendiculares (L G, M G, N G) erunt interceptæ A G radicibus *a* æquales reſpectivè.

Not.

Exhinc conſtat, quòd

1. In hac explicatione *coefficiens b* indeterminata habetur; ut in præcedentibus ipſa *n*.

2. In prima & ſecunda ſerie ſemper una poſitiva radix habetur, & unica.

3. In ſecunda ſerie minima radix ipſi A B, vel *n* æquatur.

4. Communis omnium linearum *nodus* eſt *punctum* X, ubi B X (vel *a*) = *n*.

5. In tertia ſerie ſubindè duæ habentur radices poſitivæ (quando ſcilicet E F curvas bis ſecat) nonnunquam una tantùm (cùm E F ipſarum aliquam contingat; id quod accidit in ſecundo gradu cùm $a = \frac{b}{2}$; in tertio cùm $a = \frac{2}{3}b$; in quarto cùm $a = \frac{3}{4}b$) aliquando nulla, cùm E F infra tangentes cadit, & adeò nuſquam curvis occurrit.

6. Secundi gradûs curva eſt *hyperbola*, reliquæ *hyperboliformes*, quarum communes *aſymptoti* ſunt rectæ A H, A D.

Series

Series quarta.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + cc = nn.$$
$$a^3 + cc\,a = n^3.$$
$$a^4 + cc\,aa = n^4.$$

Sit recta indefinitè protensa AH, & huic perpendicularis AD; fiat autem angulus RAH semirectus; tum utcunque ducatur GZK
Fig. 211. ad AD parallela; & facto AG. AC :: AC. ZK; per K intra angulum DAR describatur *hyperbola* KXK; sint denuò curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter GZ, GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ propositò deservient. Nam si AG (vel GZ) dicatur a, erit $GK = a + \frac{cc}{a}$; & $GLq = aa + cc$; & $GM\,cub = a^3 + cca$; & $GNqq = a^4 + ccaa$.

Not.

1. Designantur radices, ut in præcedentibus, positâ $AE = n$, & ductâ EF ad AH parallelâ.

2. Si AP = AC, erit PX ad *hyperbolam* KXK ordinatarum *minima*; unde si AE (vel n) $\sqsupset$ PX; nulla dabitur radix in primo gradu.

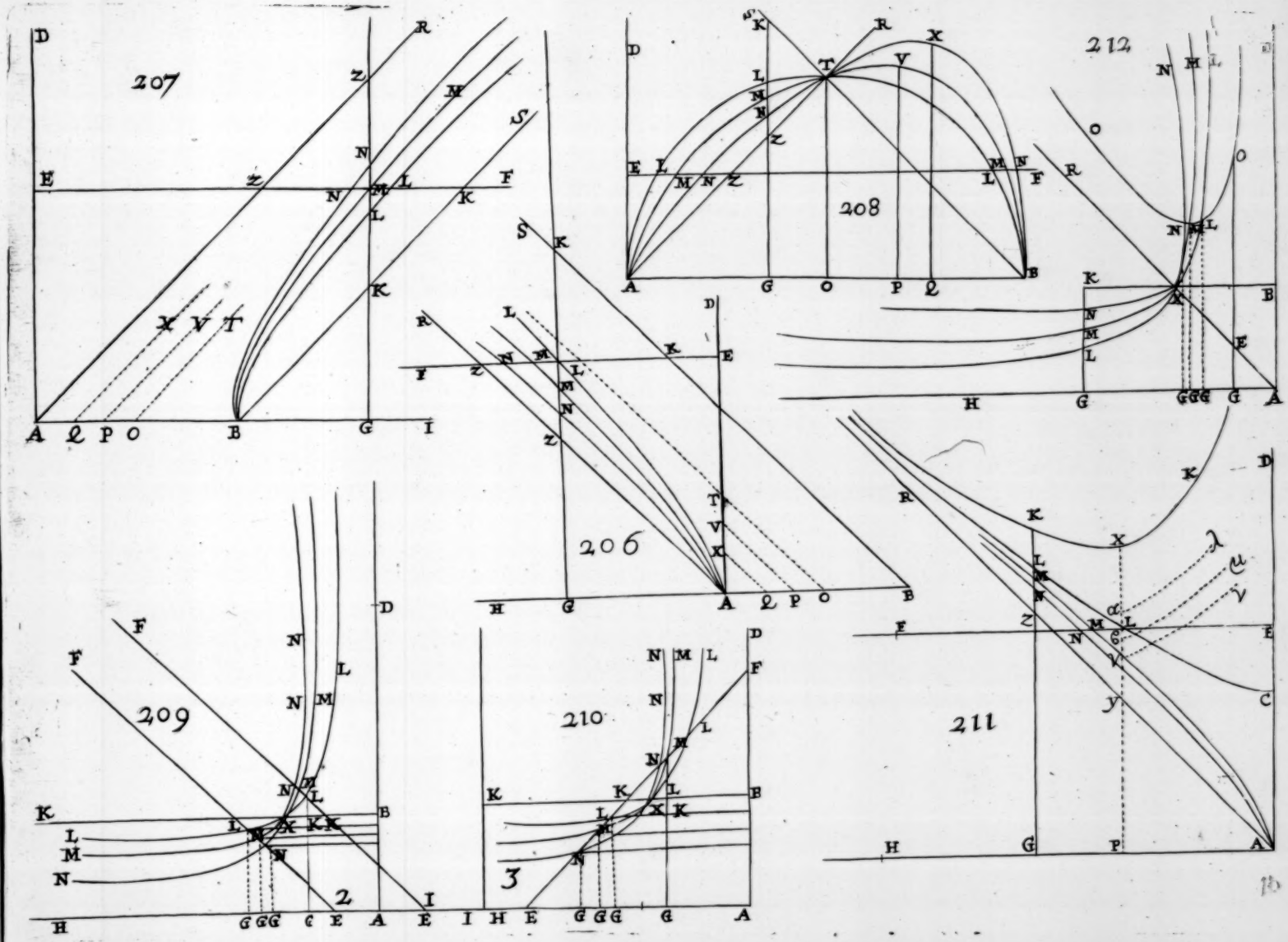
3. Curva CLL est *hyperbola æquilatera*, cujus *centrum* A, *semiaxis* AC; quæ & ordinatarum est *minima*; alioquin si $n \sqsubset c$, semper una vera radix habetur, & unica.

4. Reliquæ AMM, ANN sunt hyperboliformes ad infinitum excurrentes; unde semper una vera radix habetur, neque plures.

5. Si fuerit $Y\alpha = \frac{1}{2}YX$; $Y\zeta = \frac{1}{3}YX$; $Y\gamma = \frac{1}{4}YX$, & per puncta α, ζ, γ, traductæ concipiantur *hpperbola* (habentes & ipsæ *asymptotos* DA, AR) $\alpha\lambda$, $\zeta\mu$, $\gamma\nu$; erunt hæ ipsarum curvarum CLL, AMM, ANN *asymptoti*. (Similes etiam *asymptoti* conveniunt lineis posthac describendis, quanquam de illis conticeamus.)

6. Hinc in secundo gradu $a + \frac{cc}{2a} \sqsubset n$; in tertio $a + \frac{cc}{3a} \sqsubset n$;

in


207
208
212
206
209
210
211
2
3

F

in quarto $a + \frac{cc}{4a} \sqsubset n$; quæ tamen inæqualitas eo minor eſt, quò AE (vel n) major exiſtit.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{nn}{a}.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^3}{aa}.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^4}{a^3}.$$

Poſſit hæc ſeries explicari juxta præcedentium modum ſecundum, & eaſdem adhibendo curvas LXL, MXM, NXN; quarum nimirum proprietas eſt, ut rectâ GK ductâ ad AH utcunque perpendicularari, ſit $GL = \frac{nn}{AG}$; & $GM = \frac{n^3}{AGq}$; & $GN = \frac{n^4}{AG\,cub.}$ Fig. 212.

Nam ſi fiat angulus HAR ſemirectus, & utcunque ducatur GEO ad AH perpendicularis; & ſit GE. c :: c. EO; & per O intra aſymptotos AD, AR deſcribatur *hyperbola* OO; hujuſce cum expoſitis lineis LXL, MXM, NXN interſectiones, radices a reſpectivas determinabunt; ductis utique LG, MG, NG ad AH perpendicularibus; erunt interceptæ AG ipſis a æquales reſpectivè.

Poſſint conſimili modo ſubſequentes omnes æquationes explicari; ſed eas modo duntaxat priore dabimus expoſitas.

Series quinta.

Fig. 213.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{cc}{a} - a = n. \\ cc - aa = nn. \\ cca - a^3 = n^3. \\ ccaa - a^4 = n^4. \end{array}\right\}$$

Series ſexta.

$$\left.\begin{array}{l} a - \frac{cc}{a} = n. \\ aa - cc = nn. \\ a^3 - cca = n^3. \\ a^4 - ccaa = n^4. \end{array}\right\}$$

Fig. 213. Fiat angulus RAI ſemirectus, & AD ad AI perpendicularis; in qua $AC = c$; tum utcunque ductâ GZ ad AD parallelâ, ſit AG (vel GZ). AC :: AC. ZK, & per K, intra angulum DAR deſcribatur *hyperbola* KYK; tum ſint curvæ CLYHLλ, AMYHMμ, ANYHNν tales, ut inter AG (vel GZ) & GK ſit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ propoſito deſervient.

Conſtat hoc, ut in præcedente; & quo pacto radices reſpectivè determinantur. Verùm adnotetur præterea.

Not.

1. Curvæ CLH, AMH, ANH ad quintam ſeriem pertinent; reliquæ HLλ, HMμ, HNν ad ſextam.

2. Quoad curvas ad quintam ſeriem pertinentes; ſi $A\varphi = \sqrt{\frac{ACq}{2}}$; & ordinetur φY; erit Y communis linearum interſectio, ſeu *nodus*.

3. In harum primo gradu ordinata AK eſt infinita, in ſecundo AC eſt maxima; in tertio ſi fuerit $AP = \sqrt{\frac{ACq}{3}}$, & ordinetur PV, erit PV maxima (unde radicum una ſemper major eſt quam $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$ altera minor) in quarto ſi $AQ = \sqrt{\frac{ACq}{4}} = \frac{AC}{2}$, & ordinetur QX, erit QX maxima (unde radicum una major erit, altera minor ipsâ $\frac{AC}{2}$).

4. Con-

4. Consequenter in harum secundo gradu si $n \sqsubset c$; in tertio, si $n^3 \sqsubset cc\sqrt{\frac{cc}{3}} - \frac{cc}{3}\sqrt{\frac{cc}{3}} = \frac{2}{3}cc\sqrt{\frac{cc}{3}}$; vel $n^6 \sqsubset \frac{4}{27}c^6$; in quarto si $n^4 \sqsubset \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{16} = \frac{3}{16}c^4$; nulla radix habetur; unam in istis casibus recta EF curvas supergreditur; nec iis occurrit.

5. Itidem in his omnibus maxima possibilis radix est AH = AG.

6. Curva CYH est *Circuli quadrans*, reliquæ AMH, ANH quodammodo κυκλοειδεῖς.

7. Ad sextam seriem pertinentium curva HLL est *hyperbola æquilatera*, cujus axis AH; reliquæ sunt *Hyperboliformes*. Unde quoad hanc seriem liquent cætera.

Series septima.

$$a + b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + ba + cc = nn.$$
$$a^3 + baa + cca = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

In recta BAH indefinitè protensâ capiatur AB = b; & in AD ad BH perpendiculari sit AC = c; sint etiam anguli HAR, HBS Semirecti; tum arbitrariè ductâ GY ad AH perpendiculari quæ ipsam BS secet in Y; fiat AG. AC :: AC. YK; & per K intra angulum DVS describatur *hyperbola* KKK; sint demum curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ satisfacient negotio. Nam est GK = $a + b + \frac{cc}{a}$; & GL q = $aa + ba + cc$; & GM cub = $a^3 + baa + cca$; & GN q q = $a^4 + ba^3 + ccaa$. Fig. 214.

Not.

1. Secundi gradûs curva CLL est pars *hyperbolæ æquilateræ*, cujus *centrum* O, ipsam AB bisecans; & siquidem AC $\sqsubset$ AO, est OH (ad AB perpendicularis, &) = $\sqrt{\text{AC q} - \text{AO q}}$ ejus *semiaxis*; sin AC $\sqsupset$ AO, ejus axis est OI = $\sqrt{\text{AO q} - \text{AC q}}$. reliquæ verò curvæ AMM, ANN sunt *hyperboliformes*.

2. Hinc conſtat in ſecundo gradu ſi fuerit $n \supset C$, nullam veram radicem dari; alioquin in omnibus una ſemper habetur, & unica; quoniam recta E F curvas ſemel interſecabit, nec pluries.

Series octava.

Fig. 215.

$$\frac{cc}{a} + b - a = n.$$
$$cc + ba - aa = nn.$$
$$cca + baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa + ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Series nona.

$$a - b - \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba - cc = nn.$$
$$a^3 - baa - cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 - ccaa = n^4, \&c.$$

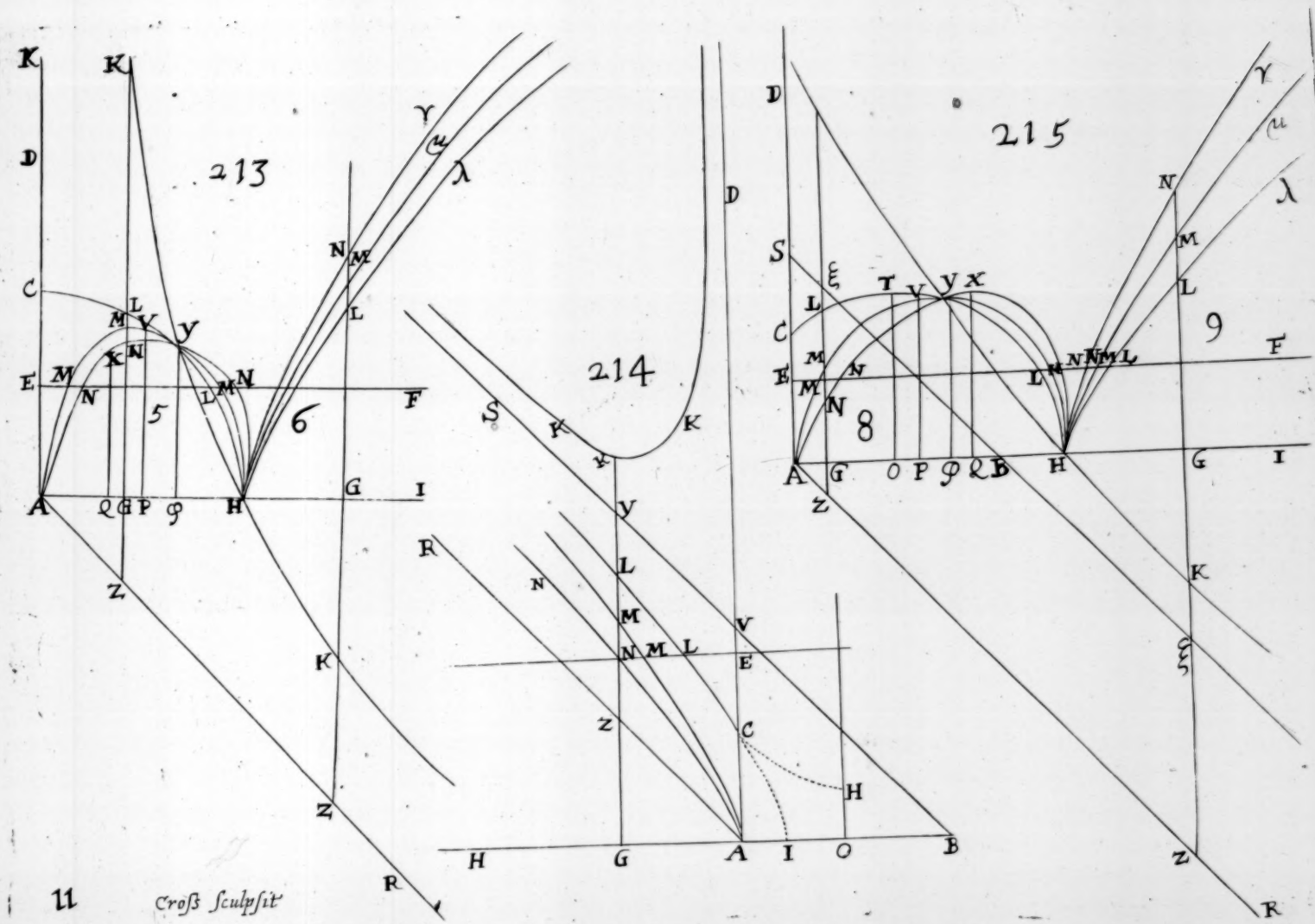
Fig. 215. In recta A I ſumatur A B $= b$; & in A D ad ipſam A I perpendiculari ſit A C $= c$; fiant autem anguli I A R, A B S ſemirecti; ducatúrque recta Z G K ad A I utcunque perpendicularis, ipſam B S ſecans ad ξ; & ſit A G. A C:: A C. ξ K; tum per K intra angulum D S B deſcribatur *hyperbola* KYHK; ſint denuo curvæ C L H λ, A M H M μ, A N H N ν tales, ut inter A G, G K ſint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ curvæ propoſito ſatisfacient; conſtat autem hoc ut in præcedente.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad octavam ſeriem pertinent, reliquæ verò H L λ, H M μ, H N ν, ad nonam.

2. Quoad octavam ſeriem, ſi biſecetur A B in O, & ordinetur O T ad curvam C L H eſt O T maxima; ſin fiat A P $= \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} +$

cc



11 Cross sculpsit

$\frac{cc}{3}$, ac ordinetur P V ad curvam A M H, erit P V maxima; item si A Q $= \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur Q X ad curvam A N H erit Q X maxima.

3. Hinc, si in secundo harum gradu sit $n \sqsubset \sqrt{cc + \frac{bb}{4}}$; in tertio si $\left(\text{posito fore } f = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}}\right)$ sit $n^3 \sqsubset ccf + bff - f^3$; in quarto, si $\left(\text{posito fore } g = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb + \frac{cc}{2}}\right)$ sit $n^4 \sqsubset ccgg + bg^3 - g^4$; nulla datur radix; nam his suppsi tis, recta E F curvis non occurret, respectivè.

4. Si fuerit A $\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur φ Y; erit Y *Nodus* curvarum; unde si $n = A\varphi$; erit A φ una radicum in omnibus.

5. Curva C L H est *circumferentia Circuli*, cujus *Centrum* O; reliquæ A M H, A N H sunt *Cycliformes*.

6. Peculiare est in secundo gradu, quòd si $n \supset c$, detur una tantùm radix.

7. In hac radicum maxima (quæ & minima est in nona serie) est A H $= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}$.

8. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, cujus *semiaxis* O H; reliquæ H M μ, H N ν sunt *hyperboliformes*; unde patet in serie nona semper unam, & hanc unicam radicem haberi.

Series decima.

Fig. 216.

$a + b - \frac{cc}{a} = n.$

$aa + ba - cc = nn.$

$a^3 + baa - cca = n^3.$

$a^4 + ba^3 - ccaa = n^4$, &c.

Series

Series undecima.

$$\frac{cc}{a} - b - a = n.$$
$$cc - ba - aa = nn.$$
$$cca - baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa - ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Fig. 216. In recta BAH ſumatur BA = b; & in AD ad AH perpendiculari ſit AC = c; ſintque anguli HAR, HBS ſemirecti; tum utcunque ductâ rectâ GKξ ad AH perpendiculari (quæ ipſam BS ſecet in ξ; ſit AG.AC::AC.ξK; & per K intra *aſymptotos* VD, VS deſcribatur *hyperbola* KYHK; ſint demum curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter AG (vel GZ) & GK ſint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ propoſito ſervient, id quod conſtat, ut in præcedentibus.

Not.

1. Curvæ HLλ, HMμ, HNν ad decimam ſeriem pertinent; reliquæ CLH, AMH, ANH ad undecimam.

2. Curva HLλ eſt *hyperbola æquilatera*, & curva CLH *circularis circumferentiæ* pars; utriuſque commune centrum eſt O, ipſam AB biſecans (unde $AH = \sqrt{\frac{bb}{4} + cc} : -\frac{b}{2}$)

3. In decima ſerie radix una ſemper habetur, & unica; in undecima nunc duæ, nunc una, ſubinde nulla.

4. $A\phi = \frac{cc}{b}$; & $A\downarrow = \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}} : -\frac{b}{4}$; & ordinentur ϕY, $\downarrow$X; puncta Y, X ſunt nodi curvarum.

5. In undecimæ ſecundo gradu ordinata AC eſt maxima; ſin AP $= \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} : -\frac{b}{3}$; & à P ad curvam AMH ordinetur Pγ, hæc maxima erit; item ſi AQ $= \sqrt{\frac{9bb}{64} + \frac{cc}{2}} : -\frac{3b}{8}$; & à

Q ad curvam A N H ordinetur Q ♌, hæc etiam maxima erit; unde de radicum limitibus fiet judicium; ut in iis, quæ ad ſeriem octavam ſunt adnotata.

Series duodecima.

Fig. 217.

$$a - b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba + cc = nn.$$
$$a^3 - baa + cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

Series decima tertia.

$$b - a - \frac{cc}{a} = n.$$
$$ba - aa - cc = nn.$$
$$baa - a^3 - cca = n^3.$$
$$ba^3 - a^4 - ccaa = n^4, \&c.$$

Pro his, Sit A B = b; & A C = c; & angulus A B S ſemirectus, & G ξ ad A B utcunque perpendicularis, & A G . A C :: AC. ξ K; & K H K I K *hyperbola aſymptotis* S A, S B deſcripta; denuò curvæ C L H I L λ, A M H M I M μ, A N H N I N, tales ſint, ut inter AG, G K ſit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N. Fig. 217.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H, atque curvæ I L λ, I M μ, I N, ad ſeriem duodecimam ſpectant, verùm intermediæ curvæ H L I, H M I, H N I ad decimam tertiam.

2. Curvæ C L H, I L λ ſunt *hyperbolæ æquilateræ*, quarum commune *centrum* O (rectam A B biſecans) & *ſemiaxis* O H (vel O I) = √ A O q. — A C q reliquæ tales ſunt, quales figura monſtrat.

3. Curvæ

3. Curva HLLI eſt *ſemicirculus*; reliquas itidem oſtentat Schema.

4. Si $A\zeta = \frac{cc}{b}$; $A\psi = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; & $A\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; ordinentúrque rectæ ζV, ψX, φY; erunt puncta V, X, Y *nodi* curvarum (ſi $b \sqsupset \sqrt{8cc}$, deerunt *nodi* X, Y; ſi $b = \sqrt{8cc}$; ii coaleſcent).

5. Ordinatarum ad curvam CLH *maxima* eſt ipſa AC; ſin $AP = \frac{b}{3} - \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ordinetur $P\gamma$ ad curvam AMH; erit $P\gamma$ *maxima*; item ſi $AQ = \frac{1}{8}b - \sqrt{\frac{2}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur $Q\delta$ ad curvam ANH, erit $Q\delta$ *maxima*.

6. Ordinatarum ad curvam HLLI *maxima* eſt ipſa OT; ſin $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ad curvam HMI ordinetur pg, erit pg *maxima*; item ſi $Aq = \frac{1}{8}b + \sqrt{\frac{2}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur qd ad curvam HNI, erit qd *maxima*.

7. Hinc radicum limites dignoſcentur, ut innuitur in iis, quæ ad octavam ſeriem animadverſa ſunt.

8. Patet in Serie duodecima nunc tres, modo duas, ſemper unam radicem haberi; in decima tertia verò ſubinde duas, aliquando tantùm unam, interdum nullam haberi.

9. Et hæc quidem conſtant poſito fore $\frac{b}{2} \sqsubset c$; at ſi $\frac{b}{2} = c$; evaneſcet Series decima tertia; coaleſcent puncta H, O, I; recta AB *hyperbolam* KKK tanget; curvæque CLH, ILλ in rectas lineas degenerabunt.

10. Sin $\frac{b}{2} \sqsupset c$; etiam evaneſcit Series decima tertia; *hyperbola* KKK tota infra rectam AB jacente; quo caſu curva CLL erit hyperbola æquilatera, habens centrum O, ſemiaxem (ipſi AB perpendicularem) $OT = \sqrt{ACq - AOq}$; tunc & curvæ AMM, ANN ad infinitum procurrent, ſic ut æquationes, quæ in Serie duodecima, unam ſemper, & unicam radicem obtineant. Hæc ſuffecerit inſinuâſſe; quin & rem totam hactenus particulatim attigiſſe. Subnectemus autem notas quaſdam magis generales.

Fig. 218.

In

In *præmissas explicationes* animadvertatur generatim.

1. Propositam quamvis æquationem explicans *curva* designatur hoc modo: proponatur, exempli causâ, *æquatio* $a^5 + ba^4 + cc\,a^3 - d^3aa - f^4a = n^5$; In recta indefinitè protensa HI designetur punctum A, pro radicum termino, vel origine; tum arbitrariè sumptâ AG pro indeterminatâ radice a; fiat GK æqualis primo seriei propositam æquationem continentis gradu; nempe sit hic $GK = a + b + \frac{cc}{a} - \frac{d^3}{aa} - \frac{f^4}{a^3}$ (utique rationem a ad c semel continuando fit $\frac{cc}{a}$; rationem a ad d bis continuando fit $\frac{d^3}{aa}$; ac ità porrò) tum inter AG, GK tot mediarum proportionalium, quot æquationis propositæ gradus exigit (is autem à pura quæsitæ radicis potestate indicatur) in hoc nempe casu quatuor mediarum proportionalium prima sit GO; per ejusmodi puncta O traducta curva AOO proposito deserviet. Fig. 219.

2. De radicibus falsis, seu negativis nihil attigimus suprà; cæterùm eæ reperiuntur hoc modo. Æquationi propositæ subrogetur altera, cujus in locis paribus (etiam vacuos locos adnumerando) signa sunt illis contraria, quæ habet æquatio proposita; erunt hujusce *subditiciæ æquationis* radices veræ, seu positivæ ipsius propositæ æquationis radices falsæ, seu negativæ. *Exemplo* sit *æquatio* $a^3 + baa = n^3$; vel $a^3 + baa^* - n^3 = 0$. Subrogetur $a^3 - baa^* + n^3 = 0$; & hujus, † utì suprà edoctum, veræ radices designentur, hæ *propositæ æquationis* falsæ erunt. Rursus sit $a^3 - baa = n^3$; vel $a^3 - baa - n^3 = 0$; substituatur æquatio $a^3 + baa + n^3 = 0$; hæc nullam veram radicem obtinet; ergo nec *æquatio proposita* falsam admittit. † *In Serie* 3.

3. Quinimò datâ verâ radice quâpiam, depressioris gradûs æquatio quædam falsis reperiendis inserviet, qualis ità determinatur. Proponatur æquatio quævis, puta $a^3 + baa = n^3$; cujus nota sit radix una, quæ vocetur f. Construatur æquatio planè similis propositæ, eásdemque *coefficientes* habens, tantum pro a substituendo f; nempe $f^3 + bff = n^3$. ergò $a^3 + baa = n^3 = f^3 + bff$; adeóque $a^3 + baa - f^3 - bff = 0$. dividatur hæc æquatio (id quod semper fieri potest) per $a - f$; proveniet $aa \frac{+ba + bf}{+fa + ff} = 0$; cujus æquationes eædem erunt cum reliquis æquationis propositæ radicibus; quæ proinde duas colligitur radices falsas habere; itaque mutatis locorum parium signis, ut ità fiat $aa \frac{-ba - bf}{-fa - ff} = 0$; hujus æquationis

veræ

veræ radices propoſitæ falſas exhibent. Hic inſuper modus æquationis propoſitæ, quatenus illa ex aliarum in ſe ductu provenit, conſtitutionem oſtendit.

4. Radices maximæ & minimæ deprehenduntur in quacunque ſerie ponendo (quovis in gradu ſeriei) fore $n=0$; ut in octava ſerie ſit $ba-aa+cc=0$; adeóque $cc=aa-ba$, erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}+cc}\right)$ *maxima radix*; item in Serie duodecima ſit $aa-ba+cc=0$; unde $cc=ba-aa$; erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-cc}\right)$ *radix maxima*; & $a\left(=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-cc}\right)$ *radix minima.*

5. *Curvarum nodi*, vel *interſectiones* innoteſcunt, cujuſvis in Seriei quovis gradu, ponendo fore $a=n$; ut in octava Serie, ubi $ba-aa+cc=nn$, ſit $a=n$; ergò $ba-aa+cc=aa$; vel $cc=2aa-ba$; vel $\frac{cc}{2}=aa-\frac{ba}{2}$; quare $a=\frac{b}{4}+\sqrt{\frac{bb}{16}+\frac{cc}{2}}$. Item in Serie duodecima, ubi $aa-ba+cc=nn=aa$; erit ideò $cc=ba$; ac inde $a=\frac{cc}{b}$.

6. *Ordinatæ maximæ, minimaque* variis nodis, methodiſque paſſim notis inveſtigantur; ego ſimul illas atque curvarum *tangentes* unà operâ ſic determino. Sit curva A γ H, ad Seriem undecimam pertinens, ejúſque gradum, cujus æquatio eſt $cca-baa-a^3=x^3$; poſito γ T curvam tangere, & γ P ad A H ordinari, reperio (de ſupra monſtratis) fore $PT=\frac{3x^3}{3aa+2ba-cc}$, tum conſidero, ſi ordinata P γ ſit maxima, fore tangentem ipſi H A parallelam, ſeu rectam P T eſſe infinitam; quare cùm ſit $x^3=PT\times:3aa+2ba-cc$; & x ſit finita, patet eſſe $3aa+2ba-cc=0$; vel $aa+\frac{2}{3}ba=\frac{cc}{3}$; adeóque $\surd:\frac{bb}{9}+\frac{cc}{3}:-\frac{b}{3}=a=AP$. Fig. 220.

7. Adnoto demùm è *maximis* & *minimis ordinatis* radicum limites derivari; nempe ſi reperiatur ad maximam ordinatam pertinentis radicis (velut ipſius A P in exemplo proximè ſuperiori) valor, & is ubique in æquatione pro ipsâ a ſubſtituatur, ſi quod provenit, deficiat ab *homogeneo* (quod vocant) *comparationis*, *problema* conſtrui nequit

Cross sculpsit

nequit, aut saltem radicibus aliquot caret, quas æquationis gradus & species præ se ferunt. Eadem *minimarum* est ratio; tantùm ibi proveniens *summa* debet *homogeneum* illud excedere, quò radix aliqua, vel omnes habeantur. *Exempla* comparent in præmissis. Hîc itaque subsisto.

Laus DEO Optimo Maximo.

FINIS.

ERRATA.

PAg. 5. *Lin.* 20. ad testatur, *legé* testatam facit. *p.* 9. *l.* 3. *leg.* velocitatum. *p.* 14. *l.* 36. *leg.* plana. *p.* 17. *l.* 24. *leg.* prohibetur *p.* 18. *l.* 32. *leg* à puncto B. *p.* 19. *l.* 4. *leg.* B D, G K. *p.* 22. 10. *leg.* VD multitudo censeri. *p.* 23. *l.* 7. *leg.* radius ad *p.* 23. *l.* 10. *leg.* nec non, datis. *p.* 24. *l.* 2. *leg.* effectæ. *p.* 24. *l.* 24. *leg.* quidem ut punctum. *p.* 30. *l.* 18. *leg.* protracta. *p.* 32. *l.* 5, 6. *leg.* tangentes (una — hujus) *p.* 35. *l.* 5. *leg.* tangant. *p.* 35. *l.* 6. *leg.* M P. *p.* 35. *l.* 12. *leg.* T P. *p.* 37. *l.* 2. *leg.* divisâ. *p.* 40. *l.* 4. *leg* arcus N H major est ipsâ. *p.* 41. *l.* 32. *leg.* versari. *p* 43. *l.* 15. *leg.* aliam H R. *p.* 47. *l.* 26. Fig. 39, & 40. *pag.* 49. *l.* 16. *leg.* 2 *f x y*. *p.* 52. *l.* 3. *dele* Fig. 51, 52. *p.* 52. *l.* 6. *leg.* Fig. 51, 52. *pag.* 52 *l.* 24. *leg.* Fig. 53. *p.* 55. *l.* 15. *dele* se intersecantes in X. *p.* 57. *l.* 25. *leg.* δ P. *p.* 58. *l.* 19. *leg.* F B F ipsi K E K. *p.* 59. *l.* 2. *leg.* K E K. *p.* 61. *l.* 26. *leg.* punctum. *p.* 62. *l.* 27. *leg.* K O ⊏ K A. *p.* 63. *l.* 16. *leg.* contactum. *p.* 64. *l.* 22. *leg.* Fig. 80. *p.* 65. *l.* 4. *leg.* στενολεχίαν. *p.* 67. *l.* 11. *leg* tum alia. *p.* 67. *l.* 35. *leg*, Q O q = Z q. *p.* 68. *l.* 7. *leg.* F Q. *p.* 70. *l.* 22. *leg.* Fig. 95. *p.* 76. *l.* 3. *leg.* H T (*a*) ⊏ G A. *p.* 76. *l.* 11. *leg.* D F. *p.* 76. *l.* 18. *leg.* P K. *p.* 76. *l.* 20. *leg.* tanget recta RFK. *p.* 78. *l.* 24. *leg.* infra. *p.* 79. *l.* 18. *dele* Fig. 113. *p.* 79. *l.* 31. *leg.* Fig. 113. *p.* 86. *l.* 31. *leg.* $\sqrt{VCZ\varphi} = CG$. *p.* 87 *l.* 14. *leg.* $D\psi^3 = \sqrt{\frac{32}{243}}$. *pag.* 91. *l.* 9. *leg.* in recta. *p.* 91. *l.* 23. *leg.* æquale rectangulo ex. *p.* 91. *l.* 24. *leg.* P, Q. *p.* 96. *l.* 15. *leg.* C A. C D. *p.* 96. *l.* 22. *leg.* $AD = \frac{s}{t} CA$. *p.* 97. *l.* 2. *leg.* totam. *p.* 102. *l.* 25. *leg.* O P ad O T. *pag.* 106. *l.* 10. *leg.* applicatis, *p.* 106. *l.* 19. *leg.* semi-axis. *p.* 112. *l.* 2. *leg.* applicatis. *p.* 114. *l.* 22. *leg.* $\frac{PLQO}{2\ Rad.}$ *p.* 114. *l.* 26. *leg.* propositum. *p.* 116. *l.* 5. *leg.* R. S. *p.* 122. *l.* 22. *leg.* Fig. 183. *p.* 123. *l.* 1. *leg.* Fig. 184 *p.* 125. *l.* 4. *leg.* D M = D I. *p.* 128. *l.* 7. *leg.* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 11. *dele* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 23 $\frac{PM}{\sqrt{APM}}$ *p.* 129. *l.* 13. emerget undecima Lect. *p.* 136. *l.* 20. *leg.* hyperbolæ. *pag.* 139. *l.* 3. *leg.* nam. *p.* 140. *l.* 1. *leg.* *n* ⊐ *c*. à *p.* 105. ad *p.* 112. *l* 1. *leg.* Lect. XII.

UBi (*pag.* 100) de Centro gravitatis parabolæ & paraboliformis verba fiunt, intelligantur non curvæ lineæ, ſed iis comprehenſa ſpatia, de quibus apparet iſthic agi.

Sicubi ponitur $\frac{\delta}{\sigma}$, nec adponitur ἀπόδειξις ulla, deſignantur termini rationem exprimentes, quam habet circuli diameter ad ejus circumferentiam.